

ザリスキー層の表現可能性について

<https://ryo1203.github.io>

2021年8月29日

概要

集合値関手を幾何学的な対象とみなすためにその関手が表現可能か否かを判定する必要がある。その一つの判定法として、表現可能関手による開被覆を持つザリスキー層は表現可能関手であること (定理 3.5) を示す。また、これを用いてアファインスキームの一般化である準連接 \mathcal{O}_X 代数 \mathcal{B} に対するスペクトラム $\text{Spec}(\mathcal{B})$ が定義できること (定理 4.1) を示す。

目次

1	表現可能関手	1
2	表現可能射	2
3	ザリスキー層とザリスキー被覆	3
4	準連接 \mathcal{O}_X 代数のスペクトラム	9

1 表現可能関手

宇宙 \mathcal{U} を一つ固定し、以下では圏といったら \mathcal{U} 小圏とし、(Sets) によって \mathcal{U} 集合からなる圏とする。(実際に扱うのはスキームの圏であるのでそこまで気にしなくて良い)

米田の補題より、圏 \mathcal{C} は集合値関手 $F: \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Sets}$ の圏 $\hat{\mathcal{C}} \ni X \mapsto h_X$ によって埋め込むことができる。ここで関手 $h_X: \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Sets}$ は $T \in \mathcal{C}$ に対して $h_X(T) := \text{Hom}(T, X)$ と定義される関手 (米田関手) である。

定義 1.1 (表現可能関手). 関手 $F: \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Sets}$ が表現可能 (representable) であるとは、ある対象 X と同型射 $\xi: h_X \rightarrow F$ が存在することをいう。

米田の補題より、この X は唯一つの同型射による同型を除いて一意に定まる。以下、対象 X と表現関手 h_X を同一視する。

定義 1.2 (関手のファイバー積). $\hat{\mathcal{C}}$ はファイバー積をつねに持つ。 F, G, H を \mathcal{C} から (Sets) への反変関手とし、関手間の射 $F \rightarrow H$ と $G \rightarrow H$ があるとす。任意の対象 $T \in \mathcal{C}$ について、

$$(F \times_H G)(T) := F(T) \times_{H(T)} G(T)$$

と定める。ここで、右辺は集合の圏におけるファイバー積である。 $(F \times_H G)(T)$ は T について関手的であり、この関手を $F \times_H G \in \widehat{\mathcal{C}}$ と書く。集合としての射影

$$\begin{aligned} p(T) &: (F \times_H G)(T) \rightarrow F(T), \\ q(T) &: (F \times_H G)(T) \rightarrow G(T) \end{aligned}$$

は関手間の射 $p: F \times_H G \rightarrow F$, $q: F \times_H G \rightarrow G$ を定める。これより、 $(F \times_H G, p, q)$ は $\widehat{\mathcal{C}}$ のファイバー積になる。

例 1.3 (表現可能関手のファイバー積). F, G, H が表現可能で $F \cong h_X, G \cong h_Y, H \cong h_S$ とする。このとき、 $\widehat{\mathcal{C}}$ におけるファイバー積 $F \times_H G$ が対象 Z によって表現可能であることと、 \mathcal{C} において $X \times_S Y$ が存在し、 $Z = X \times_S Y$ となることが同値である。

実際、 $(X \times_S Y, p, q)$ の普遍性は \mathcal{C} の任意の対象 T について、 p と q は T について関手的な次の全単射

$$\begin{aligned} h_{X \times_S Y}(T) &= \text{Hom}(T, X \times_S Y) \rightarrow \text{Hom}(T, X) \times_{\text{Hom}(T, S)} \text{Hom}(T, Y) \\ &= h_X(T) \times_{h_S(T)} h_Y(T) \end{aligned}$$

を引き起こす。

2 表現可能射

F と G を関手 $(\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ とする。スキームの間の射の性質 \mathbf{P} を関手間の射 $f: F \rightarrow G$ が持つと考えることができる。

X をスキームとし、 $g: X \rightarrow G$ を $(\widehat{\text{Sch}})$ における射とする。(ここでは X と h_X を同一視している) $F \times_G X$ を $(\widehat{\text{Sch}})$ におけるファイバー積とする。このとき二つの射影を

$$\begin{aligned} p &: F \times_G X \rightarrow F \\ q &: F \times_G X \rightarrow X \end{aligned}$$

と表すこととする。

定義 2.1. $(\widehat{\text{Sch}})$ における関手間の射 $f: F \rightarrow G$ が**表現可能 (representable)** であるとは、任意のスキーム X と $(\widehat{\text{Sch}})$ における任意の射 $g: X \rightarrow G$ に対し、関手 $F \times_G X$ が表現可能であることである。

Z をスキームとし、 $\zeta: Z \rightarrow F \times_G X$ を同型射とする。米田の補題から、 ζ と第二射影 $F \times_G X \rightarrow X$ はスキームの射 $Z \rightarrow X$ を定める。ここで、この射は同型射の合成を除いて (Z, ζ) のとり方に依らず定まる。これより、次の定義が意味を持つ。

定義 2.2. \mathbf{P} をスキームの射の性質であり、左右への同型射を合成しても保たれる性質とする。 $(\widehat{\text{Sch}})$ における表現可能射 $f: F \rightarrow G$ が**性質 \mathbf{P} を持つ**とは、任意のスキーム X と任意の射 $g: X \rightarrow G$ において、第二射影 $f_{(X)}: F \times_G X \rightarrow X$ が \mathbf{P} を持つこととする。

表現可能関手同士のファイバー積も表現可能関手であることから、表現可能関手間の射は表現可能である。

3 ザリスキー層とザリスキー被覆

スキーム S を一つ固定し、関手 $F: (\widehat{\text{Sch}}/S)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ を考えるとき、この F が S スキームによって表現可能か否かの判断は一般には難しい。ここで、このような関手の表現可能性の判定法を与える。

関手 $F: (\widehat{\text{Sch}}/S)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ について、 $j: U \rightarrow X$ を S スキームの間の開埋め込みとし、 $\xi \in F(X)$ をとる。このとき、前層と同様の記法を用いて、 $F(j): F(X) \rightarrow F(U)$ による ξ の像 $F(j)(\xi)$ を単に $\xi|_U$ と表すこととする。

定義 3.1 (ザリスキー層). F がザリスキー位相における層、もしくは単に $(\widehat{\text{Sch}}/S)$ 上のザリスキー層であるとは層の条件を満たす関手 $F \in (\widehat{\text{Sch}}/S)^{\text{opp}}$ であるとする。すなわち、任意の S スキーム X と任意の開被覆 $X = \cup_{i \in I} U_i$ に対して、条件

- (I) 任意の $i \in I$ に対して $\xi_i \in F(U_i)$ が任意の $i, j \in I$ に対して $\xi_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たす組が与えられたとき、 $\xi \in F(X)$ であって $\xi|_{U_i} = \xi_i$ が任意の $i \in I$ を満たすものが唯一存在する。

を満たす。

スキームの射の張り合わせが可能であることから次が成り立つ。

命題 3.2. 表現可能関手 $F: (\widehat{\text{Sch}}/S)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ はザリスキー層である。

最後に表現可能なザリスキー被覆を持つザリスキー層は表現可能であることを示す。

定義 3.3 (開部分関手). 関手 $F: (\widehat{\text{Sch}}/S)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ の開部分関手 (open subfunctor) F' を開埋め込みである表現可能射 $f: F' \rightarrow F$ のこととする。

すなわち、任意の S スキーム X と任意の $(\widehat{\text{Sch}}/S)$ の射 $g: X \rightarrow F$ に対し、第二射影 $f_{(X)}: F' \times_F X \rightarrow X$ がスキームの射として開埋め込みであることである。

定義 3.4 (ザリスキー被覆). 開部分関手の族 $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$ が F のザリスキー (開) 被覆 (Zariski open covering) であるとは任意の S スキーム X と任意の $(\widehat{\text{Sch}}/S)$ の射 $g: X \rightarrow F$ に対し、 $(f_i)_{(X)}$ による像が X を被覆することをいう。

以上の言葉を用いて、本稿の一つの目的である表現可能な開被覆を持つザリスキー層は表現可能であるという以下の定理を示す。この定理を用いてグラスマニアン表現可能性や準接続 \mathcal{O}_X 代数からなるスペクトラムの表現可能性 (定理 4.1) を示すことができる。ここで S は一つ固定したスキームである。

定理 3.5. 関手 $F: (\text{Sch}/S)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ が以下の条件を満たすとする.

- (a) F がザリスキー層である.
- (b) F が表現可能関手 F_i からなるザリスキー被覆 $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$ を持つ.

このとき F は表現可能である.

証明. F_i が S スキーム X_i で表現可能であるとする. これらを張り合わせて F を表現するスキーム X が構成できることを示す.

(1) 任意の S スキーム T について $f_i(T): F_i(T) \rightarrow F(T)$ が単射になることを示す. f_i の合成により定まる射 $\tilde{f}_i(T): \text{Hom}_{(\widehat{\text{Sch}}/S)}(h_T, F_i) \rightarrow \text{Hom}_{(\widehat{\text{Sch}}/S)}(h_T, F)$ について米田の補題から次の可換図式がある.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{(\widehat{\text{Sch}}/S)}(h_T, F_i) & \xrightarrow{\cong} & F_i(T) \\ \downarrow \tilde{f}_i(T) & & \downarrow f_i(T) \\ \text{Hom}_{(\widehat{\text{Sch}}/S)}(h_T, F) & \xrightarrow{\cong} & F(T) \end{array}$$

これより, $f_i(T)$ の単射性のためには

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(T): \text{Hom}(h_T, F_i) &\rightarrow \text{Hom}(h_T, F) \\ x &\mapsto f_i \circ x \end{aligned}$$

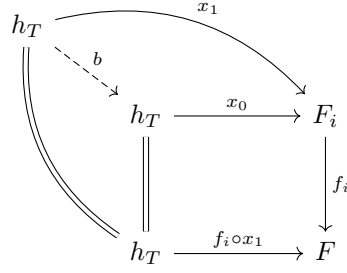
により定まる $\tilde{f}_i(T)$ が単射であればよい. そこで, $x_0, x_1 \in \text{Hom}(h_T, F_i)$ であって, $f_i \circ x_0 = f_i \circ x_1$ であるものを取る. このとき,

$$\begin{array}{ccc} h_T & \xrightarrow{x_0} & F_i \\ \parallel & & \downarrow f_i \\ h_T & \xrightarrow{f_i \circ x_1} & F \end{array}$$

が可換であるからファイバー積を考えると $(\widehat{\text{Sch}}/S)$ において唯一の射 $a: h_T \rightarrow h_T \times_F F_i$ が存在する. f_i が開埋め込みより, 定義から $(f_i)_{(T)}: h_T \times_F F_i \rightarrow h_T$ はスキームにおける開埋め込みより, ある T の開部分 S スキーム U が存在して $h_T \times_F F_i \cong h_U$ であり, $(f_i)_{(U)}$ は $U \rightarrow T$ の開埋め込みに対応する. ファイバー積の性質から $h_T \xrightarrow{a} h_U \xrightarrow{(f_i)_{(U)}} h_T$ は恒等写像になる. これより $T \rightarrow U \hookrightarrow T$ が恒等写像になるから, 開埋め込みは全射にもなるから $U = T$ となる. よって, $h_T \cong h_T \times_F F_i$ より

$$\begin{array}{ccc} h_T & \xrightarrow{x_0} & F_i \\ \parallel & & \downarrow f_i \\ h_T & \xrightarrow{f_i \circ x_1} & F \end{array}$$

はカルテジアンである. したがって, $f_i \circ x_1 = f_i \circ x_0$ から



より $b: h_T \rightarrow h_T$ であって $x_0 \circ b = x_1$ かつ $\text{id}_{h_T} \circ b = \text{id}_{h_T}$ となるものが唯一存在する. $b = \text{id}_{h_T}$ となることから $x_0 = x_1$ となる. 以上より, $\tilde{f}_i(T)$ は単射であることが示された. したがって, 任意の S スキーム T について $f_i(T): F_i(T) \rightarrow F(T)$ は単射である.

$F_i(T)$ が $F(T)$ に含まれていると考えると, 任意の $i, j \in I$ について $(F_i \times_F F_j)(T) = F_i(T) \times_{F(T)} F_j(T)$ を $F_i(T) \cap F_j(T) \subset F(T)$ と同一視できる. これによって, $(F_i \times_F F_j)(T)$ と $(F_j \times_F F_i)(T)$ も任意の S スキーム T について同一視できるので $F_i \times_F F_j$ と $F_j \times_F F_i$ を同一視できる. f_i が表現可能射で F_j が表現可能関手であるから, $F_i \times_F F_j$ は表現可能である. この表現するスキームを $X_{\{i,j\}}$ とおく. 同様に, 任意の $i, j, k \in I$ について $(F_i \times_F F_j \times_F F_k)(T) = F_i(T) \cap F_j(T) \cap F_k(T)$ と考えれば, $F_i \times_F F_j \times_F F_k$ や $F_j \times_F F_i \times_F F_k$ などを同一視して関手 $F_{\{i,j,k\}}$ と表すこととする.

f_i が表現可能性で F_i が表現可能であるから, $F_i \times_F F_j \rightarrow F_i$ は開埋め込み $X_{\{i,j\}} \rightarrow X_i$ を誘導し, この像を U_{ij} と表すこととする. これはスキームの同型射 $\psi_{i,j}: X_{\{i,j\}} \rightarrow U_{ij}$ を誘導する. ここで $\varphi_{ji} = \psi_{j,i} \circ \psi_{i,j}^{-1}: U_{ij} \cong U_{ji}$ と定める. これによって, 貼り合わせする組 $((X_i)_{i \in I}, (U_{ij}), (\varphi_{ij}))$ を得る.

(2) 貼り合わせ条件を満たすことを示す. $U_{ij} \subset X_i$ は開部分スキームであり, $U_{ii} \cong X_{\{i,i\}}$ は $F_i \times_F F_i$ を表現するスキームであるが, $F_i(T) \cap F_i(T) = F_i(T)$ より F_i を表現するスキームと一致するから $U_{ii} = X_i$ である. あとは $U_{ij} \cap U_{ik}$ 上でコサイクル条件

$$\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$$

を満たすことを示せばよい. まず, $\varphi_{ji}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$ が同型 $U_{ij} \cap U_{ik} \cong U_{ji} \cap U_{jk}$ を誘導することを示す. $\varphi_{ji}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$ を関手間の射に移すと, $U_{ij} \cap U_{ik}$ はスキームの圏でのファイバー積 $U_{ij} \times_{X_i} U_{ik}$ であるからそれを関手の圏に移すことによって, これは φ_{ji} とファイバー積から得られる射影との合成

$$\begin{array}{ccc} F_i \times_F F_j & \longleftarrow & (F_i \times_F F_j) \times_{F_i} (F_i \times_F F_k) \\ \downarrow \varphi_{ji} & \swarrow \varphi_{ji}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} & \\ F_j \times_F F_i & \longleftarrow & (F_j \times_F F_i) \times_{F_j} (F_j \times_F F_k) \end{array}$$

となっている. ただし, $\varphi_{ji}: F_i \times_F F_j \rightarrow F_j \times_F F_i$ は $X_{\{i,j\}}$ によるそれらの同一視から得られる射である. すなわち, $\varphi_{ji}: U_{ij} \rightarrow U_{ji}$ を開埋め込み $\psi_{i,j}$ と $\psi_{j,i}$ を経由して $F_i(T) \cap F_j(T) = F_j(T) \cap F_i(T)$ から得られる同型射と同一視している. ここで, 任意の S スキーム T について, $F_i(T)$ 等を $F(T)$ 内で考えることができ, それは次のような可換図式になる.

$$\begin{array}{ccc}
F_i(T) \cap F_j(T) & \longleftarrow & (F_i(T) \cap F_j(T)) \cap (F_i(T) \cap F_k(T)) \\
\parallel \varphi_{ji}(T) = \text{id} & \nearrow \varphi_{ji}|_{U_{ij} \cap U_{ik}(T)} & \parallel \text{id} \\
F_j(T) \cap F_i(T) & \longleftarrow & (F_j(T) \cap F_i(T)) \cap (F_j(T) \cap F_k(T))
\end{array}$$

したがって、任意の T でこれが成り立つから、 $\varphi_{ji}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$ は同型

$$\varphi_{ji}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} : U_{ij} \cap U_{ik} \rightarrow U_{ji} \cap U_{jk}$$

を誘導する。すなわち、以下の可換図式を得る。ここで下の行の恒等写像は上で述べた $F_i \times_F F_j \times_F F_k$ など同一視したときに得られる同型射である。

$$\begin{array}{ccc}
U_{ij} \cap U_{ik} & \xrightarrow{\varphi_{ji}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}} & U_{ji} \cap U_{jk} \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
F_{\{i,j,k\}} & \longrightarrow & F_{\{i,j,k\}}
\end{array}$$

この図式と上の T を代入したときのことを考えると、結局コサイクル条件は $F_i(T) \cap F_j(T) \cap F_k(T)$ の $F(T)$ 内での恒等写像のコサイクル条件と一致するため、コサイクルはたしかに成り立っている。以上より、貼り合わせする組 $((X_i)_{i \in I}, (U_{ij}), (\varphi_{ij}))$ はたしかに貼り合わせ条件を満たしているから、これから得られる S スキームを X とおく。

X_i は貼り合わせより X の開部分スキームと同一視できるのでそうすると、米田の補題から開埋め込み $f_i: F_i = X_i \rightarrow F$ は $\xi_i \in F(X_i)$ と対応する。さらに、もともとの $f_i: F_i \rightarrow F$ について、任意の S スキームに対して単射性から $F_i(T) \subset F(T)$ の包含写像から誘導されるものと同一視していたから、

$$\begin{array}{ccccc}
& & F_i(T) & \xrightarrow{f_i(T)} & F(T) \\
& \nearrow (f_i)_{(F_j)(T)} & & \nearrow f_i|_{F_i \times_F F_j(T)} & \parallel \\
F_i(T) \cap F_j(T) & & & & \\
& \searrow (f_j)_{(F_i)(T)} & & \searrow f_j|_{F_j \times_F F_i(T)} & \parallel \\
& & F_j(T) & \xrightarrow{f_j(T)} & F(T)
\end{array}$$

は可換になるから、 $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_j \cap X_i}$ より $\xi_i|_{X_i \cap X_j} = \xi_j|_{X_j \cap X_i} \in F(X_i \cap X_j)$ となる。したがって、 F がザリスキー層であることから $\xi \in F(X)$ であって、 $\xi|_{X_i} = \xi_i \in F(X_i)$ となるものが唯一存在し、米田の補題からこれに対応する射 $f: X \rightarrow F$ が得られる。

(3) $f: X \rightarrow F$ が同型射であることを示す。そのために、任意の S スキーム T について、 $f(T): X(T) \rightarrow F(T)$ が全単射であることを示す。

単射性から示す。 $x, y \in X(T)$ が $f(T)(x) = f(T)(y) \in F(T)$ を満たすとす。簡単のため $x' := f(T)(x)$, $y' := f(T)(y)$ とおく。ここで、 X が X_i で被覆されていることから、 $T_{ij} := x^{-1}(X_i) \cap y^{-1}(X_j)$ と定めると、 T の開被覆 $T = \cup_{i,j \in I} T_{ij}$ が取れる。ここで、包含写像 $T_{ij} \rightarrow T$ から可換図式

$$\begin{array}{ccc}
F(T) & \longrightarrow & F(T_{ij}) \\
f(T) \uparrow & & \uparrow f(T_{ij}) \\
X(T) & \longrightarrow & X(T_{ij})
\end{array}$$

が得られる。 x' と y' の仮定から、ザリスキー層における制限 $x'|_{T_{ij}}$ と射の制限 $x|_{T_{ij}}$ をそれぞれ考えると、上の図式に対応して、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
x' = y' & \longleftarrow & x'|_{T_{ij}} = y'|_{T_{ij}} \\
\uparrow & & \uparrow \\
x, y & \longleftarrow & x|_{T_{ij}}, y|_{T_{ij}}
\end{array}$$

が得られる。(2)と同様に X_i と F_i の同型から、 $X_i(T_{ij})$ と $X_j(T_{ij})$ をそれぞれ $F_i(T_{ij})$ と $F_j(T_{ij})$ と同一視して、定義域を F_i と F_j からそれぞれ X_i と X_j 上の $f_i: X_i \rightarrow F$ と $f_j: X_j \rightarrow F$ とみなしているから、 $F_i(T_{ij}), F_j(T_{ij}) \subset F(T_{ij})$ に注意して、 T_{ij} の定義から $x|_{T_{ij}} \in X_i(T_{ij})$ と $y|_{T_{ij}} \in X_j(T_{ij})$ であり、それぞれの $f_i(T_{ij}): X_i(T_{ij}) \rightarrow F(T_{ij})$ と $f_j(T_{ij}): X_j(T_{ij}) \rightarrow F(T_{ij})$ による像がその同一視による可換性

$$\begin{array}{ccc}
& & F(T_{ij}) \\
& \nearrow f_i(T_{ij}) & \uparrow f_i(T_{ij}) \\
X_i(T_{ij}) & \xrightarrow{\cong} & F_i(T_{ij})
\end{array}$$

から、 $F_i(T_{ij})$ と $F_j(T_{ij})$ に入るので、 $(x|_{T_{ij}})' := f_i(T_{ij})(x|_{T_{ij}}) \in F_i(T_{ij})$ と $(y|_{T_{ij}})' := f_j(T_{ij})(y|_{T_{ij}}) \in F_j(T_{ij})$ がそれぞれ $x|_{T_{ij}}$ と $y|_{T_{ij}}$ と一対一に対応している。ここで次の可換図式を考える。(ただし $f_i(T_{ij}): X_i(T_{ij}) \rightarrow F(T_{ij})$ と $f_j(T_{ij}): X_j(T_{ij}) \rightarrow F(T_{ij})$ は省略している。)

$$\begin{array}{ccccc}
& & X(T_{ij}) & \xrightarrow{f(T_{ij})} & F(T_{ij}) \\
& \nearrow & \nearrow & & \nearrow \\
& & X_i(T_{ij}) & \xrightarrow{\cong} & F_i(T_{ij}) \\
& \searrow & \searrow & & \searrow \\
(X_i \cap X_j)(T_{ij}) & \xrightarrow{\cong} & X_j(T_{ij}) & \xrightarrow{\cong} & F_j(T_{ij}) \\
& \searrow & \searrow & & \searrow \\
& & X_j(T_{ij}) & \xrightarrow{\cong} & F_j(T_{ij}) \\
& & & & \searrow \\
& & & & (F_i \times_F F_j)(T_{ij})
\end{array}$$

ここで、真ん中の射の同型に関わる $f_i(T_{ij})$ などとの可換性は f を定義したときの $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ から従う。 $f_i(T): F_i(T_{ij}) \rightarrow F(T_{ij})$ と $f_j(T): F_j(T_{ij}) \rightarrow F(T_{ij})$ の単射性と f の定義から $(x|_{T_{ij}})'$ と $(y|_{T_{ij}})'$ は $F(T_{ij})$ において $(x|_{T_{ij}})' = x'|_{T_{ij}} = y'|_{T_{ij}} = (y|_{T_{ij}})'$ である。したがって、とくにそれらの元は $F_i(T_{ij}) \cap F_j(T_{ij}) = (F_i \times_F F_j)(T_{ij})$ の元であるので、一対一対応より、 $x|_{T_{ij}}$ と $y|_{T_{ij}}$ は $(X_i \cap X_j)(T_{ij})$ の元であることがわかる。 X の貼り合わせ条件から X において、 $X_i \cap X_j = U_{ij} = U_{ji}$ と $F_i \times_F F_j$ が同型である。また、開埋め込み $X_i \rightarrow X$ がモノ射であることから、包含 $(X_i \cap X_j)(T_{ij}) \subset X(T_{ij})$ があり、 $F(T_{ij})$ において、 $x'|_{T_{ij}} = y'|_{T_{ij}}$ より $x|_{T_{ij}} = y|_{T_{ij}} \in (X_i \cap X_j)(T_{ij}) \subset X(T_{ij})$ が任意の $i, j \in I$ で成り立つ。よって、命

題 3.2 よりザリスキー層の条件の一意性から $x = y \in X(T)$ となるので, $f(T): X(T) \rightarrow F(T)$ は単射であることが示された.

全射性を示す. 任意の S スキーム T を一つ固定する. $\zeta \in F(T)$ を任意に取る. このとき, 米田の補題から, 射 $z: T \rightarrow F$ が一対一に対応する. 特に任意の S スキーム T' について,

$$\begin{aligned} z(T'): T(T') &\rightarrow F(T') \\ x &\mapsto F(x)(\zeta) \end{aligned}$$

と定義されている. このとき, F_i と X_i の同一視により得られる表現可能射 $f_i: X_i \rightarrow F$ が開埋め込みであり, f_i の族がザリスキー被覆であることから, $(f_i)_{(T)}: X_i \times_F T \rightarrow T$ はある T の開部分スキーム $T_i = X_i \times_F T$ によって開埋め込み $T_i \rightarrow T$ となり, $T = \cup_{i \in I} T_i$ となる. ここで, $z: T \rightarrow F$ の T_i への制限が $T_i \rightarrow T$ との合成であることと, ファイバー積の可換図式

$$\begin{array}{ccc} F_i \times_F T = T_i & \xrightarrow{(f_i)_{(T)}} & T \\ \downarrow & \searrow z|_{T_i} & \downarrow z \\ X_i & \xrightarrow{f_i} & F \end{array}$$

について, 任意の S スキーム T' について, $f_i(T'): X_i(T') = F_i(T') \rightarrow F$ の単射性と開埋め込み $T' \rightarrow T$ がモノ射であることから, 水平方向の射が単射な各成分の射影であるような可換図式

$$\begin{array}{ccc} F_i(T') \times_{F(T')} T(T') & \xrightarrow{(f_i)_{(T)}(T')} & T(T') \\ \downarrow & \searrow z|_{T_i(T')} & \downarrow z(T') \\ X_i(T') & \xrightarrow{f_i(T')} & F(T') \end{array}$$

が得られる. このとき, $z|_{T_i(T')}$ の像は $X_i(T')$ に含まれることが任意の S スキーム T' について成り立つから, $z|_{T_i}: T_i \rightarrow X_i$ が得られる. 同様にして $X_i(T') \cap X_j(T') \subset F(T')$ から $z|_{T_i \cap T_j}: T_i \cap T_j \rightarrow X_i \cap X_j$ となる. このとき, $z|_{T_i} \in X_i(T_i)$ に $X_i(T_i) \cong F_i(T_i) \subset F(T_i)$ によって対応する $F_i(T_i) \subset F(T_i)$ の元を考える. 米田の補題と $z|_{T_i}$ の定義から $z|_{T_i}(T_i): T_i(T_i) \rightarrow F(T_i)$ によって, $z|_{T_i}(T_i)(\text{id}_{T_i}) \in F(T_i)$ が対応する. ここで, $z|_{T_i} = z \circ (f_i)_{(T_i)}$ と $T_i(T_i) \rightarrow T(T_i)$ の定義から

$$T_i(T_i) \longrightarrow T(T_i) \xrightarrow{z(T_i)} F(T_i)$$

$$\text{id}_{T_i} \longmapsto (f_i)_{(T)} \circ \text{id}_{T_i} = (f_i)_{(T)} \longmapsto z(T_i)((f_i)_{(T_i)})$$

となる. そして, $z(T_i)$ は $\zeta \in F(T)$ により上述したように定義されており, $T_i \rightarrow T$ が開埋め込みであることから, $z(T_i)((f_i)_{(T_i)}) = F((f_i)_{(T)})(\zeta) = \zeta|_{T_i}$ となる. したがって, $z|_{T_i}: T_i \rightarrow X_i$ には $\zeta|_{T_i} \in F_i(T_i) \subset F(T_i)$ が対応する. ここで, 包含写像 $X_i \rightarrow X$ と $z|_{T_i}$ の合成により,

$$\tilde{z}_i: T_i \xrightarrow{z|_{T_i}} X_i \rightarrow X$$

が得られる. $T_i \cap T_j \subset T_i, T_j \subset T$ であることと, $X_i \rightarrow X$ と $X_j \rightarrow X$ は $X_i \cap X_j$ 上で一致することより, $\tilde{z}_i|_{T_i \cap T_j} = \tilde{z}_j|_{T_i \cap T_j}$ から, 射の貼り合わせにより, $\tilde{z}: T \rightarrow X$ であって, $\tilde{z}|_{T_i} = z|_{T_i}$ となるようなものが

唯一存在する. このとき, $f(T): X(T) \rightarrow F(T)$ によってこの \tilde{z} を移した $f(T)(\tilde{z}) \in F(T)$ の $F(T_i)$ への $(f_i)_{(T)}: T_i \rightarrow T$ による制限 $f(T)(\tilde{z})|_{T_i} \in F(T_i)$ は可換図式

$$\begin{array}{ccc} X(T) & \xrightarrow{f(T)} & F(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(T_i) & \xrightarrow{f(T_i)} & F(T_i) \end{array}$$

と $\tilde{z}|_{T_i} = z|_{T_i}$ および, 縦の射が包含写像であるような以下の可換図式

$$\begin{array}{ccc} X(T_i) & \xrightarrow{f(T_i)} & F(T_i) \\ \uparrow & \nearrow f_i(T_i) & \uparrow \\ X_i(T_i) & \xrightarrow{\cong} & F_i(T_i) \end{array}$$

から, $f(T)(\tilde{z})|_{T_i} = f(T_i)(\tilde{z}|_{T_i}) = f(T_i)(z|_{T_i}) = f_i(T_i)(z|_{T_i}) \in F_i(T_i) \subset F(T_i)$ となる. そしてこの元は, $f_i(T_i)$ が上で示したように $z|_{T_i} \in X_i(T_i)$ と $\zeta|_{T_i} \in F_i(T_i) \subset F(T_i)$ の対応を誘導することから, この元は $\zeta|_{T_i}$ と一致する. よって, F がザリスキー層であることから, その唯一性より, $f(T)(\tilde{z}) = \zeta \in F(T)$ となるから, $f(T): X(T) \rightarrow F(T)$ は全射である.

以上より, $f(T): X(T) \rightarrow F(T)$ は任意の S スキーム T で全単射であることが示されたので $f: X \rightarrow F$ は同型射になる. したがって, F はこの X により表現可能であることが示された. \square

4 準連接 \mathcal{O}_X 代数のスペクトラム

A を環とし, $X := \text{Spec}(A)$ とおく. A 代数 B を取ると, 大域切断関手と Spec の随伴性から, 任意の X スキーム T について, 全単射

$$\text{Hom}_X(T, \text{Spec}(B)) \rightarrow \text{Hom}_{(A\text{-Alg})}(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$$

であって, T と B について関手的なものが得られる. すなわち, A スキーム $\text{Spec}(B)$ は関手 $T \mapsto \text{Hom}_{(A\text{-Alg})}(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ を表現する. この概念を一般化する.

定理 4.1. X をスキームとし, \mathcal{B} を準連接 \mathcal{O}_X 代数とする. このとき X スキーム $\text{Spec}(\mathcal{B})$ であって, 任意の X スキーム $f: T \rightarrow X$ について, T について関手的な全単射

$$\text{Hom}_X(T, \text{Spec}(\mathcal{B})) \rightarrow \text{Hom}_{(A\text{-Alg})}(\mathcal{B}, f_*\mathcal{O}_T)$$

を誘導するものが存在する.

すなわち, $\text{Spec}(\mathcal{B})$ は次で定まる関手

$$(\text{Sch}/X)^{\text{opp}} \longrightarrow (\text{Sets})$$

$$(f: T \rightarrow X) \longmapsto \text{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Alg})}(\mathcal{B}, f_*\mathcal{O}_T)$$

を表現する.

証明. X スキーム $f: T \rightarrow X$ について, $F(T) := \text{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Alg})}(\mathcal{B}, f_*\mathcal{O}_T)$ と定める.

(1) F はザリスキー層であることを示す. ここで f_* と Hom は左完全関手であることから, F はザリスキー層である. まず, T の任意の開被覆 $T = \cup_{i \in I} T_i$ を取る. ここで, T_i の X スキームとしての構造射が $T_i \rightarrow T \xrightarrow{f} X$ であることから, この射を f_i とし, 同様に $T_i \cap T_j$ の X スキームとしての構造射 $T_i \cap T_j \rightarrow T \xrightarrow{f} X$ を f_{ij} と表すこととする. このとき, \mathcal{O}_T が層であることから, T 上の \mathcal{O}_T 代数としての完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_T \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{O}_T|_{T_i} \rightarrow \prod_{i, j \in I} \mathcal{O}_T|_{T_i \cap T_j}$$

が得られる. よって, 直積は層化せずとも層になっていること, f_* の左完全性と $f_*(\mathcal{O}_T|_{T_i}) = (f_i)_*\mathcal{O}_{T_i}$ 等に注意すると, 完全列

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{O}_T \rightarrow \prod_{i \in I} (f_i)_*\mathcal{O}_{T_i} \rightarrow \prod_{i, j \in I} (f_{ij})_*\mathcal{O}_{T_i \cap T_j}$$

が得られる. そして, $\text{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Alg})}(\mathcal{B}, -)$ の左完全性と直積との可換性から, 完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Alg})}(\mathcal{B}, f_*\mathcal{O}_T) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Alg})}(\mathcal{B}, (f_i)_*\mathcal{O}_{T_i}) \rightarrow \prod_{i, j \in I} \text{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Alg})}(\mathcal{B}, (f_{ij})_*\mathcal{O}_{T_i \cap T_j})$$

が得られる. したがって, 関手 F は

$$0 \rightarrow F(T) \rightarrow \prod_{i \in I} F(T_i) \rightarrow \prod_{i, j \in I} F(T_i \cap T_j)$$

を完全列にするから, F はザリスキー層になる.

定理 3.5 より, あとは F が表現可能関手からなるザリスキー被覆を持つことが示せば良い. X のアファイン被覆 $X = \cup_{i \in I} X_i$ から F のザリスキー被覆を構成する.

(2) まずアファインスキーム X_i 上において関手 $F'_i: (\text{Sch}/X_i)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ を定義する. $X_i = \text{Spec}(A_i)$ となっているとすると, \mathcal{B} が準接続 \mathcal{O}_X 代数より, $\mathcal{B}|_{X_i} = \tilde{B}_i$ となる A_i 代数 B_i が存在する. 関手 $F'_i \in \widehat{(\text{Sch}/X_i)}$ を

$$F'_i(f: T \rightarrow X_i) := \text{Hom}_{(\mathcal{O}_{X_i}\text{-Alg})}(\mathcal{B}|_{X_i}, (f_*\mathcal{O}_T))$$

と定義する. このとき, この関手が $\text{Spec}(B_i)$ を用いて $F'_i(f: T \rightarrow X_i) = \text{Hom}_{X_i}(T, \text{Spec}(B_i))$ と表せることを示す. まず, 任意の \mathcal{O}_{X_i} 代数の射 $x: \mathcal{B}|_{X_i} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_T)$ からその大域切断上の射 $x_{X_i}^\flat: \Gamma(X_i, \mathcal{B}|_{X_i}) = B_i \rightarrow \Gamma(X_i, f_*\mathcal{O}_T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ が誘導する写像

$$\begin{aligned} \Gamma: \text{Hom}_{(\mathcal{O}_{X_i}\text{-Alg})}(\mathcal{B}|_{X_i}, (f_*\mathcal{O}_T)) &\rightarrow \text{Hom}_{A_i}(B_i, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \\ x &\mapsto x_{X_i}^\flat \end{aligned}$$

を取る. ここで, 逆に任意の $\varphi \in \text{Hom}_{A_i}(B_i, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ に対して, $\text{Hom}_{(\mathcal{O}_{X_i}\text{-Alg})}(\mathcal{B}|_{X_i}, (f_*\mathcal{O}_T))$ の元を構成できる. 実際, $s \in A_i$ に対して, φ が A_i 代数としての射より,

$$\begin{aligned}\varphi_s: (B_i)_s &\rightarrow (\Gamma(X_i, f_*\mathcal{O}_T))_s \\ b/s^n &\mapsto \varphi(b)/s^n\end{aligned}$$

は $(A_i)_s$ 代数としての射になり, $D(s) \subset \text{Spec}(A_i) = X_i$ について関手的である. そして, $f_*\mathcal{O}_T$ の制限写像は $(\Gamma(X_i, f_*\mathcal{O}_T))_s \rightarrow \Gamma(D(s), f_*\mathcal{O}_T)$ がを誘導し, これも $D(s)$ について関手的だから, これらの合成により, 基本開集合上で層の射が定まるから, ここから X_i 上の \mathcal{O}_{X_i} 代数としての射

$$\tilde{\varphi}: \tilde{B}_i = \mathcal{B}|_{X_i} \rightarrow f_*\mathcal{O}_T$$

が誘導される. 以上の $x \mapsto x_{X_i}^b$ と $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ の対応はその大域切断上の写像によって定義されているから, 互いに逆写像になっており, とくに Γ が T に関して関手的だから $F'_i(f: T \rightarrow X_i) = \text{Hom}_{A_i}(B_i, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ と表すことができるようになった. したがって, T が X_i スキームであることに注意すると, アファインスキームの随伴性より, $F'_i(f: T \rightarrow X_i) = \text{Hom}_{X_i}(T, \text{Spec}(B_i))$ となり, F'_i は X_i スキーム $\text{Spec}(B_i)$ で表現される.

X の開アファイン部分スキーム X_i について, その包含写像を $\iota_i: X_i \rightarrow X$ とすると $(f_*\mathcal{O}_T)|_{X_i} = (\iota_i)_*(f_*\mathcal{O}_T)$ と書ける.

(3) (2) で構成した F'_i から関手 $F_i: (\text{Sch}/X)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ を構成する. X スキーム $f: T \rightarrow X$ について, F から X への射を

$$\begin{aligned}F(T) &= F(f: T \rightarrow X) \rightarrow X(T) = X(f: T \rightarrow X) \\ x &\mapsto (f: T \rightarrow X)\end{aligned}$$

と定める. 実際, X スキームとしての射の集合 $X(T)$ はその構造射が決まっていることから一点集合になり, さらにこの射はたしかに T について関手的であるから, 関手間の射 $F \rightarrow X$ を定める. このとき, $\iota_i: X_i \rightarrow X$ から得られる関手としての射も改めて ι_i と書くこととすると, ファイバー積によって ι_i の F による係数拡大を取ることができて, カルテジアンな可換図式

$$\begin{array}{ccc}X_i \times_X F & \xrightarrow{(\iota_i)_*(F)} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \xrightarrow{\iota_i} & X\end{array}$$

を得る. ここで, $X_i \times_X F$ は関手 $(\text{Sch}/X)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ であり, 任意の X スキーム $f: T \rightarrow X$ に対して, $X(T) = \{f: T \rightarrow X\}$ の一点集合になることに注意すると,

$$X_i(T) \times_{X(T)} F(T) = \{(\alpha, \beta) \in X_i(T) \times F(T) \mid \iota_i(T)(\alpha) = \beta \circ \alpha = f\}$$

となる. よって, もし $f: T \rightarrow X$ が $X_i \subset X$ を経由しなかったとするとこのような α が存在しないので $(X_i \times_X F)(T) = \emptyset$ になる. とくに X スキーム $f: T \rightarrow X$ は X_i スキームにならないのでこの構造射 f において, $\text{Hom}_{X_i}(T, \text{Spec}(B_i)) = \emptyset = (X_i \times_X F)(T)$ とみなせる. もし $f: T \rightarrow X$ が $X_i \subset X$ を経由するとすると, X_i スキームとみなせるため, それを $f_i: T \rightarrow X_i$ と書くこととする. すなわち $\iota_i \circ f_i = f$ である. このとき, これが T の X_i スキームとしての構造射であることに注意すると,

$$X_i(T) = \text{Hom}_X(T, X_i) = \{f_i: T \rightarrow X_i\}$$

と、一点集合になる。したがって、上で表したことを考えると、 $(X_i \times_X F)(T)$ と $F(T)$ の間に標準的な全単射がある。よって、いま $f: T \rightarrow X$ は $\iota_i: X_i \rightarrow X$ を経由しているから、 X_i 上の層とみなすことができるから、

$$\begin{aligned} F(f: T \rightarrow X) &= \text{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Alg})}(\mathcal{B}, f_*\mathcal{O}_T) \\ &= \text{Hom}_{(\mathcal{O}_{X_i}\text{-Alg})}(\mathcal{B}|_{X_i}, (f_i)_*\mathcal{O}_T) = F'_i(f_i: T \rightarrow X_i) = \text{Hom}_{X_i}(T, \text{Spec}(B_i)) \end{aligned}$$

となる。よって、任意の X スキーム $f: T \rightarrow X$ について、 $(X_i \times_X F)(T) = \text{Hom}_{X_i}(T, \text{Spec}(B_i))$ となり、この関手 $X_i \times_X F: (\text{Sch}/X)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ を F_i と定義する。このとき、 F_i は $\text{Spec}(B_i) \rightarrow X_i \xrightarrow{\iota_i} X$ によって表現可能である。さらに、関手間の射 $f_i: F_i \rightarrow F$ としてファイバー積から得られる射影 $(\iota_i)_{(F)}: X_i \times_X F \rightarrow F$ を取る。

次にこれらの $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$ がザリスキー被覆になることを示す。

(4) $f_i: F_i \rightarrow F$ が開部分関手であること、すなわち $f_i: F_i \rightarrow F$ が (表現可能な) 開埋め込みになることを示す。 X スキーム Y と $(\widehat{\text{Sch}}/X)$ における射 $g: Y \rightarrow F$ について、 $(f_i)_{(Y)}: F_i \times_F Y \rightarrow Y$ を考える。このとき、 $F_i = X_i \times_X F$ より $(f_i)_{(Y)}$ は射影

$$F_i \times_F Y = (X_i \times_X F) \times_F Y = X_i \times_X Y \rightarrow Y$$

と一致する。ただし、 $Y \rightarrow X$ は (3) で定義した $F \rightarrow X$ と g の合成 $Y \xrightarrow{g} F \rightarrow X$ で定義されていて、これを $\tilde{g}: Y \rightarrow X$ とおくこのことからとくに $f_i: F_i \rightarrow F$ が表現可能射であることがわかる。 $X_i \times_X Y \rightarrow Y$ はスキームの議論より $\tilde{g}^{-1}(X_i) \rightarrow Y$ となり、これは Y への開埋め込みである。よって、 $(f_i)_{(Y)}: F_i \times_F Y \rightarrow Y$ は開埋め込みになることがわかったので、関手間の射 $f_i: F_i \rightarrow F$ は開部分関手であることが示された。

(5) $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$ がザリスキー被覆になることを示す。 S スキームの射 $g: Y \rightarrow F$ に対して $(f_i)_{(Y)}: F_i \times_F Y \rightarrow Y$ を取ると、(4) の議論からこれは $\tilde{g}: Y \rightarrow X = \cup_{i \in I} X_i$ によって包含写像から得られる開埋め込み $\tilde{g}^{-1}(X_i) \rightarrow Y$ と一致する。よって $Y = \cup_{i \in I} \tilde{g}^{-1}(X_i)$ なので $(f_i)_{(Y)}(F_i \times_F Y) \subset Y$ は Y を被覆する。したがって、 $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$ がザリスキー被覆であることが示された。

以上より、 F と $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$ は定理 3.5 の条件を満たすことが示されたので F は X スキームで表現可能である。 \square

定義 4.2 (準連接 \mathcal{O}_X 代数のスペクトラム). 定理 4.1 で得られる X スキーム $\text{Spec}(\mathcal{B})$ を \mathcal{B} のスペクトラム (spectrum) という。

注意 4.3. $h: \text{Spec}(\mathcal{B}) \rightarrow X$ を構造射とする。定理 4.1 の証明から X のアファイン被覆は任意の取れて、表現するスキームは同型を除いて一意に定まるから最初から X の任意の開アファインスキームをすべて取るアファイン被覆 $X = \cup_{U \subset X: \text{affine}} X_U$, $X_U = U$ を取っておくことができる。このとき、 X の任意の開アファインスキーム $U (= X_U)$ について、 $h^{-1}(U)$ は関手 F の構成から F の $(\text{Sch}/U)^{\text{opp}}$ への制限を表現するスキームとなる。よって定理 4.1 の証明からこれは F_U を表現するスキームだから、 $h^{-1}(U) = \text{Spec}(B_U) = \text{Spec}(\Gamma(U, \mathcal{B}))$ となる。ゆえに \mathcal{O}_X 代数としての同型

$$h_*\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{B})} = \mathcal{B}$$

を得る。

参考文献

本稿の大部分は [GW] の 8 章と 11 章を参考に行っている。定理 3.5 の証明の (1) は [MF] を参考にし、定理 4.1 の証明の (3) のファイバー積を取るというアイデアは [SP] を参考にした。また、[KS] は米田の補題が使用できる圏の確認に用いた。

[GW] U. Gortz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry Part I: Schemes. With Examples and Exercises*, Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[SP] “Section 27.4 (01LQ): Relative spectrum as a functor—The Stacks project.” <https://stacks.math.columbia.edu/tag/01LQ> (accessed Feb. 16, 2021).

[MF] “ag.algebraic geometry - Proving the representability of a functor that is covered by open subfunctors,” MathOverflow. <https://mathoverflow.net/questions/333480/proving-the-representability-of-a-functor-that-is-covered-by-open-subfunctors> (accessed Feb. 16, 2021).

[KS] M. Kashiwara and P. Schapira, *Categories and Sheaves, vol. 332.*, Springer Berlin Heidelberg, 2006.