付値判定法と点列極限の存在性の類似性について

https://ryo1203.github.io

概要

スキームの射における separated 性などの位相空間論との類似は既によく知られている。本稿ではこの考え方をもとに separated などに関する付値判定法も位相空間論との類似で考えることが出来ることを説明する。重要な点としては付値環のスペクトラムからの射がスキームの中に点列とその極限を与えることに対応していることである。数学的な厳密性よりもキモチを説明することを重視した文章になっていることに注意していただきたい。また、本稿の内容は筆者がセミナーで指導教官から聞いたことであり、自分で見つけたものでないが、文章中の間違いがあるとしたらそれは全て筆者が生じさせたものである。

目次

1 付値判定法

スキーム論における separated 性や proper 性の判定に用いられる付値判定法というものがある。まずはその主張を述べる。A を付値環とし K はその商体で、$j\colon \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(A)$ は自然な包含 $A \hookrightarrow K$ から得られるスキームの射とする。また、X と Y を (ネーターとは限らない任意の) スキームとし、可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd}$$

を考える。ここで $v\colon \mathrm{Spec}(A) \to Y$ の**持ち上げ** (lift) とは、$\tilde{v}\colon \mathrm{Spec}(A) \to X$ であって、次のように

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{v}"] & Y \end{tikzcd}$$

を可換にするもののことである。この言葉を用いて付値判定法は次のように主張される。

定理 1.0.1 ([GW] Theorem 15.8). $f\colon X \to Y$ を任意のスキームの射とする。このときそれぞれ次は同値。

(1) f は separated/universally closed/proper である。
(2) f は quasi-separated/quasi-compact/of finite type な quasi-separated であり、上記一つ目の可換図式を与える任意の付値環 A に対して $v\colon \mathrm{Spec}(A) \to Y$ は持ち上げ $\tilde{v}\colon \mathrm{Spec}(A) \to X$ が高々一つ/少なくとも一つ/唯一つ存在する。

証明は [GW] Theorem 15.8 を参照。とくに X に Noether 性を課した場合で separated についての同値性に関しては [Ha] II Theorem 4.7 に述べられている。

この付値判定法における $\tilde{v}$ の存在性が、点列極限の存在性の類似であることを説明するのが本稿の目的である。類似点をまとめた表は本稿の最後に記載されている。

2 種々の定義

まずは混同を避けるため、本稿における種々の定義を述べておく。まずはスキームの射について述べる。同値性等については [GW] を参照。

定義 2.0.1 ([GW]). スキームの射 $f\colon X \to Y$ の性質を次のように定める。

(a) separated であるとは、対角写像 $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ が closed immersion になること。
(b) universally closed であるとは、任意のスキームの射 $g\colon Y' \to Y$ について、base change をした $f \times \mathrm{id}'_Y\colon X \times_Y Y' \to Y \times_Y Y' = Y'$ が closed immersion になること。
(c) proper であるとは、separated かつ universally closed かつ of finite type であること。

次に位相空間とその間の写像の性質に関する定義を述べる。

定義 2.0.2 ([Bou]). 位相空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ の性質を次のように定める。

(a) X が Hausdorff であるとは、対角写像 $\Delta_X\colon X \to X \times X$ の像が閉集合になること。
(b) f が proper であるとは、f が連続かつ、任意の位相空間 Z に対して $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ が閉写像になること。
(c) X が compact Hausdorff であるとは、quasi-compact かつ Hausdorff であること。

類似を考えるために必要な次の位相空間の射の proper に関する同値性がある。[*1]

事実 2.0.3 ([Bou] I 10.3 Prop.7). f を Hausdorff 空間 X と局所 compact 空間 Y の間の連続写像とする。このとき f が proper であることと、Y の任意の compact Hausdorff な部分集合の f による逆像が compact Hausdorff になることは同値。

とくに Y を一点集合 $\{*\}$ とすれば、Hausdorff 空間 X が quasi-compact であることと $f\colon X \to \{*\}$ が proper であることは同値になっている。

*1 GAGA によって複素数体上の compact 空間に対応しているとも言える (らしい)。

以上のことから、次のような (よく知られた) 性質の対応があることがわかる (点列 compact など細かいことには言及せずあくまでキモチ)。

スキーム	位相空間	位相空間における点列極限の存在性
separated	Hausdorff	点列の極限が存在するならば一意的
universally closed	quasi-compact(proper)	任意の点列は収束部分列を持つ
proper	compact Hausdorff	任意の点列は収束部分列を持ち、その収束先は一意的

3 付値判定法の解釈

$v\colon \mathrm{Spec}(A) \to Y$ の持ち上げ $\tilde{v}\colon \mathrm{Spec}(A) \to X$ の存在性を点列極限の存在性として解釈することが出来る。それは可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd}$$

を用いて次のように説明できる。

まず、付値環 A のイデアルは包含関係に関して全順序であることに注意し、A は零イデアル (0) とただ一つの極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つことから、A の素イデアルは、ある全順序な添字集合 Λ によって

$$(0) \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_\lambda \subset \mathfrak{p}_\mu \subset \cdots \subset \mathfrak{m} \tag{3.1}$$

という形をしている。さらに $x_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ と表すとき、$\mathfrak{p}_\lambda \subset \mathfrak{p}_\mu$ は $x_\mu \in \overline{\{x_\lambda\}}$ と同値。ゆえに x_μ の任意の開近傍は x_λ を含む、すなわち x_λ が十分近く x_μ に近づいているということである。とくに $\mathfrak{m}$ は任意の $x_\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ で $\mathfrak{m} \in \overline{\{x_\lambda\}}$ から、$\mathfrak{m}$ にすべての x_λ が十分近く近づいている、つまり $\mathfrak{m}$ が点列 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限として扱うことができる。このことから、$\mathrm{Spec}(A)$ が点列 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と、その極限 $\mathfrak{m}$ を持つことから、$\mathrm{Spec}(A)$ からスキームへの射 $v\colon \mathrm{Spec}(A) \to Y$ を与えることは、スキーム Y の中に点列とその極限を与えていることに等しい。

一方、$j\colon \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(A)$ は点列の一番最初 (0) を指定していて、$u\colon \mathrm{Spec}(K) \to X$ はその最初の点 $u((0))$ を X 内に定めている。とくに $x_\lambda \in \overline{\{(0)\}}$ から、その最初の点から十分点列を生成することが出来ているが、一般に最初の点を与えるだけではその極限 $u(\mathfrak{m})$ に相当する点が存在するかわからない。

ここで、もし $v\colon \mathrm{Spec}(A) \to Y$ の持ち上げ $\tilde{v}\colon \mathrm{Spec}(A) \to X$ が存在したとすると、可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{v}"] & Y \end{tikzcd}$$

を得るが、これはすなわち $\mathrm{Spec}(A)$ の定める点列とその極限が、$u\colon \mathrm{Spec}(K) \to X$ の定義する最初の点 $u((0))$ と適合するように X 内の点列とその極限を与えていることを意味する。つまり (あくまでキモチだが) 次が同値であることが分かった。

- 任意の付値環 A による上記の図式において持ち上げ $\tilde{v}$ が存在する。
- X に点列が与えられたとき Y においてその点列極限が存在するならば X においてもその点列極限が存在する。

付値判定法は持ち上げ $\tilde{v}$ の存在性に言及した定理であり、それぞれ X が $f\colon X \to Y$ によって Y に対して相対的に Hausdorff/quasi-compact/compact Hausdorff であったときに対応している。まとめると次のとおりである。

$f\colon X \to Y$ の性質	持ち上げ $\tilde{v}$ の存在性
separated	高々一つ存在する
universally closed	少なくとも一つ存在する
proper	唯一つ存在する

位相空間	点列極限の存在性
Hausdorff	点列の極限が存在するならば一意的
quasi-compact(proper)	任意の点列は収束部分列を持つ
compact Hausdorff	任意の点列は収束部分列を持ち、その収束先は一意的

参考文献

[GW] U. Görtz and T. Wedhorn, Algebraic Geometry I: Schemes with examples and exercises, 1st edition. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, vol. 52. New York, NY: Springer New York, 1977. doi: 10.1007/978-1-4757-3849-0.

[Bou] N. Bourbaki, General Topology: Chapters 1 – 4. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995. doi: 10.1007/978-3-642-61701-0.