スキーム論の概形

https://ryo1203.github.io

2020 年 10 月 23 日

概要

代数幾何学の基本的な道具としてスキームというものがある．今回の発表では (アファイン) スキームを導入することを目標とする．前半では導入する動機の一つとして, 代数閉体上の代数的集合と被約な有限生成代数の間の圏同値を示し, 後半では環のスペクトラムを定義した後 (アファイン) スキームを導入する．最後は幾何や解析の定理の類似物の例をいくつか紹介する．前提知識として位相空間論と可換環論の初歩的な知識を仮定する．

目次

1 イントロダクション

代数幾何学の目的は, 代数多様体について調べることである．代数多様体とは, 簡潔に述べれば, 多項式系

$$f_1(X_1, \ldots, X_n) = \cdots = f_k(X_1, \ldots, X_n) = 0$$

の表す図形のことである．これはとても単純なものであり, 例えば $Y - X = 0$ や $Y - X^2 = 0$ などがその例である．しかしながら, こういった例を超えると, その構造がどのようなものであるかを調べることは一般にはとても難しい．そこで, これらを抽象化しどういう性質を持っているのかを調べるための道具の一つが本稿で紹介するスキームである．まず, ヒルベルトの零点定理 (3.7) とその系 (3.8) によって幾何学的な対象である多項式の零点とその多項式から作られる環の極大イデアルが対応する．さらに, 代数的な概念と幾何学的な概念の対応として 2 章で示す代数多様体と有限生成代数の間の対応 (定理 3.16) がある．しかしながらこの対応では考えきれない対象がある．対応するのは被約な代数閉体上有限生成代数だけである．すなわち例えば代数閉体ではない体上での多項式環, $\mathbb{C}[X]/(X^2)$ などの被約ではない環, 1 変数関数体 $k(X)$ などの有限生成代数で

はない環 (体) を考えることができない．さらに, 代数多様体として同じ空間であったとしてもその点の周辺の状態を反映できていないという問題がある．例えば $Y-X=0$ と $Y=0$ の共通零点と $Y-X^2=0$ と $Y=0$ の共通零点はともに一点集合であるため図形として一致している．しかしながら一方は交差する点, 一方は二重の点であり, その点の周辺まで見ると明らかに図形として異なっている．また, 代数の極大イデアルだけでは十分な数の点を考えることができない．これらの解消のため, 任意の環にたいして代数多様体に類似した対象を結びつける概念を導入する．これが第 3 章で扱う環のスペクトラムあるいはアファインスキームである．実際に, アファインスキームと環の間には一対一の対応 (定理 4.36) がある．

アファインスキームの一般化としてスキームが位置づけられる．スキームは大雑把に言うと局所的にアファインスキームとみなすことができるような対象のことである．これは $\mathbb{R}^n$ の張り合わせで多様体が作られる類似となっている．また, 射影空間がアファイン空間の張り合わせであったように, スキームまで考えることで射影スキームを定義することが出来る．そしてスキームにおいても幾何や解析の定理の類似が示される．

2 位相空間と可換環論の準備

位相空間の言葉の定義をいくつかする．

(1) 位相空間 X が任意の X の開被覆が有限開被覆を持つとき準コンパクトであるという．
(2) 位相空間 $X \neq \emptyset$ が真部分集合であるような閉集合 2 つの和で表されないとき既約であるという．
(3) 位相空間 X の任意の二点について少なくとも一方の点についてもう一方の点を含まないような開近傍がとれるとき T_0 を満たすという．
(4) 位相空間 X の任意の二点について両方の点についてそれぞれ他方の点を含まないような開近傍が取れるとき T_1 を満たすという．
(5) 位相空間 X の任意の閉集合の降鎖が停留的であるときネーター空間であるという．
(6) 位相空間 X の点 x について $\overline{\{x\}} = X$ となるとき x を X の generic point という．

次に代数学の言葉の定義をいくつかする．本稿では環といったら単位的可換環を指すこととする．

(1) 環 A のイデアル $\mathfrak{a}$ についてその根基を

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{a \in A \mid \text{ある正整数 } n \text{ について } a^n \in \mathfrak{a}\}$$

と定める．とくに次の等号が成り立つ．

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} : A \text{ の素イデアル}} \mathfrak{p}.$$

(2) 環 A の多項式環の剰余環で表される環を有限生成 A 代数という．
(3) 環 A の冪零元が 0 のみであるとき被約であるという．

3 代数多様体と有限生成代数

この節では k を代数閉体とする．

3.1 アファイン 代数的集合

代数多様体のまえに代数的集合を定義する．[GW] は, 代数多様体を代数的集合上に適切な関数を考える構造を持つものと定義している．[Ha] は関数の構造を考えず, 既約な代数的集合として,[AM] は既約とは限らない代数的集合として代数多様体を定義している．どういった定義を採用しているかは十分注意しなければならない．本稿では混同を避けるためなるべく代数多様体という言葉を用いないこととする．

定義 3.1. 多項式環 $k[T_1, \ldots, T_n]$ とその部分集合 M についてその共通零点を

$$V(M) \coloneqq \{x \in k^n \mid \forall f \in M : f(x) = 0\}$$

と書く．

とくに M で生成されるイデアルを I とおくとき $V(M) = V(I)$ となるからイデアルについてのみ考えれば良い．また, $k[T_1, \ldots, T_n]$ は Noether 環であるから有限個の $f_1, \ldots, f_n$ が取れて $V(M) = V(f_1, \ldots, f_n)$ となる．これによって V は多項式環の部分集合から k^n の部分集合への包含関係を逆にする写像になる．

多項式の零点を見るために有用な位相を定める．

命題 3.2. $\mathfrak{a}$ を $k[T_1, \ldots, T_n]$ のイデアルとするとき $V(\mathfrak{a})$ 全体は k^n 上で閉集合系の公理を満たす．これによって定められた位相を**ザリスキー位相** (Zariski topology) という．

定義 3.3 (アファイン空間, アファイン代数的集合). k^n に Zariski 位相を入れた空間を k 上の次元 n の**アファイン空間** (Affine space) といい, $\mathbb{A}^n(k)$ と書く．$\mathbb{A}^n(k)$ の閉集合 Z を**アファイン代数的集合** (Affine algebraic set) という．つまりある $k[T_1, \ldots, T_n]$ のイデアルが存在して $Z = V(\mathfrak{a})$ となる．

$k = \mathbb{C}$ とするとき $\mathbb{C}^n$ の一般的な位相は $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ より真に強い．

アファイン代数的集合を単に代数的集合ということもある．例えば, 開集合として

$$D(f) \coloneqq \mathbb{A}^n(k) \setminus V(f)$$

が取れる．すなわち, 多項式 f に対してそれが零とならないような集合である．

定義 3.4. $\mathbb{A}^n(k)$ の部分集合 T について $k[T_1, \ldots, T_n]$ の部分集合

$$I(T) \coloneqq \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid \forall x \in T \colon f(x) = 0\}$$

はイデアルになる．これを T のイデアルという．

代数的集合という対象が定義できたので, 次はその対象の間の写像を考える．

定義 3.5. $X \subset \mathbb{A}^m(k)$ と $Y \subset \mathbb{A}^n(k)$ をそれぞれ代数的集合とする．このとき写像 $f\colon X \to Y$ が代数的集合の間の射であるとはある多項式 $f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]$ が存在して，任意の $x \in X$ で $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ となっていることである．それら全体の集合を $\mathrm{Hom}(X, Y)$ と書く．

定義より，任意の代数的集合の間の射は $\mathbb{A}^m(k)$ と $\mathbb{A}^n(k)$ の間の射に拡張できる．ただし，この拡張は一意的とは限らない．例えば $\{0\} = V(T_1) \subset \mathbb{A}^1(k)$ から $\mathbb{A}^2(k)$ への以下の射

$$\begin{aligned} V(T_1) &\longrightarrow \mathbb{A}^2(k) \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

は $f_1(T_1) = T_1$ や $f_1(T_1) = T_1^2$ に拡張できる．

命題 3.6. $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ はザリスキー位相において連続写像になる．

3.2 ヒルベルトの零点定理

定理 3.7 (ヒルベルトの零点定理). 体 K 上の有限生成代数 A はジャコブソン環である．すなわち，任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ について

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$$

となる．ただし $\mathfrak{m}$ は極大イデアル．

また，任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について体の拡大 $K \subset A/\mathfrak{m}$ は有限次拡大である．

系 3.8. (1) A を有限生成 k 代数とするときその極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $k = A/\mathfrak{m}$ となる．

(2) 任意の極大イデアル $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \dots, T_n]$ に対して，ある $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ が存在して $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \coloneqq (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$ となる．

これを用いることで例えば $z \in \mathbb{A}^n(k)$ に対して $f(z) = 0$ であることと $f \in \mathfrak{m}_z$ であることが同値である．とくに

$$I(Z) = \bigcap_{z \in Z} \mathfrak{m}_z$$

となる．ヒルベルトの零点定理にはいろいろな種類がある．次の命題の (1) はその一種である．

命題 3.9. (1) $\mathfrak{a}$ を $k[T_1, \dots, T_n]$ のイデアルとおくとき

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

が成り立つ．ただし，$\sqrt{\mathfrak{a}}$ は $\mathfrak{a}$ の根基イデアルである．

(2) 部分集合 $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ に対して

$$V(I(Z)) = \overline{Z}$$

が成り立つ．ただし $\overline{Z}$ は Z の $\mathbb{A}^n(k)$ におけるザリスキー位相に関する閉包である．

イデアルと代数的集合の間に以下の対応がある．

系 3.10. 以下の対応は包含関係を逆転させる一対一の対応になっている．

$$\begin{aligned} \left\{k[T_1, \ldots, T_n] \text{ の根基イデアル } \mathfrak{a}\right\} &\longleftrightarrow \left\{\mathbb{A}^n(k) \text{ の閉集合 } Z\right\} \\ \mathfrak{a} &\longrightarrow V(\mathfrak{a}) \\ I(Z) &\longleftarrow Z. \end{aligned}$$

とくに制限することで以下の対応がある．

$$\left\{k[T_1, \ldots, T_n] \text{ の極大イデアル}\right\} \longleftrightarrow \left\{\mathbb{A}^n(k) \text{ の点}\right\}.$$

また, 次の命題によってさらに対応がある．

命題 3.11. Z を $\mathbb{A}^n(k)$ の閉集合とする．このとき Z が既約空間であることと Z のイデアル $I(Z)$ が素イデアルであることは同値である．

系 3.12. 以下の対応がある．

$$\left\{k[T_1, \ldots, T_n] \text{ の素イデアル}\right\} \longleftrightarrow \left\{\mathbb{A}^n(k) \text{ の既約閉集合}\right\}.$$

後に述べる環のスペクトラムは素イデアルまで点としてみなしている．この対応をもとに考えると, 本来ならば点ではない既約閉集合までを点として取り込み, 点を増やしていることがわかる．例 4.12 を見るとたしかに既約閉集合を“二次元” の点として扱っている．

代数的集合 X にたいしてその“双対空間” として X 上の関数を考えることが出来る．

定義 3.13. 代数的集合 $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ と $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ に対して $x \mapsto f(x)$ として $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ が定まる．とくに $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ に k 代数の構造が自然に定まる．この構造によって k 代数の全射準同型 $\pi\colon k[T_1, \ldots, T_n] \to \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ が定まり, その核は $I(X)$ となる．

定義 3.14. k 代数

$$\Gamma(X) \coloneqq k[T_1, \ldots, T_n]/I(X) \cong \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$$

を X の**アファイン座標環** (Affine coordinate ring) という．

この $\Gamma(X)$ によって幾何学的な多項式の零点 X に対してそれに対応する代数的な概念が対応付けられる．さらにそれらの性質も 系 3.12 により対応する．

命題 3.15. $\Gamma(X)$ は被約な有限生成 k 代数である．とくに X が既約であることと $\Gamma(X)$ が整域であることは同値である．

3.3 圏同値 1

アファイン代数的集合の間の射 $f\colon X\to Y$ をとる．写像

$$\begin{aligned}\Gamma(f)\colon \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1(k)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1(k))\\ g &\longmapsto g\circ f\end{aligned}$$

は k-代数の準同型になっている．これによって関手

$$\Gamma\colon (\text{アファイン代数的集合})^{\mathrm{opp}} \longrightarrow (\text{被約有限生成 }k\text{-代数})$$

が定義される．

定理 3.16. Γ は圏同値を誘導する．また, 制限することで以下の圏同値を得る．

$$\Gamma\colon (\text{既約アファイン代数的集合})^{\mathrm{opp}} \longrightarrow (\text{整域である有限生成 }k\text{-代数})$$

証明. 忠実充満性　アファイン代数的集合 $X\subset\mathbb{A}^n(k)$ と $Y\subset\mathbb{A}^m(k)$ について写像 $\Gamma\colon \mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(\Gamma(Y),\Gamma(X))$ が全単射であることを逆写像を構成することで示す．任意の k 代数の準同型 $\varphi\colon\Gamma(Y)\to\Gamma(X)$ について, $f\colon X\to\mathbb{A}^m(k)$ を

$$f(x) \coloneqq (\varphi(\overline{T'_1})(x),\dots,\varphi(\overline{T'_m})(x))$$

と定める．像が Y に含まれることを示す．Y が代数的集合よりあるイデアル $\mathfrak{a}\subset k[T'_1,\dots,T'_m]$ があって $Y=V(\mathfrak{a})$ となる．とくに命題 3.9 と $\mathfrak{a}\subset\sqrt{\mathfrak{a}}=I(V(\mathfrak{a}))=I(Y)$ より任意の $x\in X$ と任意の $g\in I(Y)$ について $g(f(x))=0$ を示せば $f(x)\in V(\mathfrak{a})=Y$ がわかる．実際, $g(f(x))=g(\varphi(\overline{T_1})(x),\dots,\varphi(\overline{T_m})(x))=\varphi(\overline{g})(x)=0$ であるから $f\colon X\to Y$ となる．互いに逆写像になっていることを示す．任意の $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ について,

$$\Gamma(f)(\overline{T'_i})=T'_i\circ f$$

であるので良い．逆に, $\varphi\in\mathrm{Hom}(\Gamma(Y),\Gamma(X))$ について, 任意の $g\in\mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1(k))$ を取ると任意の $x\in X$ について

$$g\circ f(x)=g((\varphi(\overline{T'_1})(x),\dots,\varphi(\overline{T'_m})(x)))=\varphi(g)(x)$$

であるので良い．

本質的全射性　任意の被約有限生成 k 代数 A についてこれはある多項式環の剰余 $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ と同型である．ここで, A は被約より $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ である．$X = V(\mathfrak{a}) \subset k^n$ と定めるとこれはアファイン代数的集合であり, 命題 3.9 から $\Gamma(X) = k[T_1, \ldots, T_n]/I(X) = k[T_1, \ldots, T_n]/\sqrt{\mathfrak{a}} = k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a} \cong A$ となるので示された．制限したほうの圏同値は命題 3.15 からわかる． □

4　アファインスキーム

4.1　環のスペクトラム

環に対してそれを "関数" とするような空間を定めることができる．環 A に対して, その素イデアル全体の集合を $\mathrm{Spec}(A)$ と書く．ここで A の部分集合 M に対して

$$V(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid M \subset \mathfrak{p}\}$$

と定める．一元集合 $\{a\} \subset A$ に対して $V(\{a\})$ を $V(a)$ と書くこともある．M によって生成されるイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $V(M) = V(\mathfrak{a})$ となる．

補題 4.1. 対応 $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ は A のイデアル全体の集合から $\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合全体への包含関係を逆にする対応になっている．また, 以下を満たす．

(1) $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$, $V(1) = \emptyset$.

(2) 任意のイデアルの族 $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ について

$$V\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i).$$

(3) イデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ について

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}).$$

この命題から, $\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合 $V(\mathfrak{a})$ 全体は閉集合系の公理を満たし, $\mathrm{Spec}(A)$ に位相を定める．

定義 4.2 (環のスペクトラム). 環 A とその素イデアル全体の集合 $\mathrm{Spec}(A)$ に補題 4.1 によって定まる位相を持ったものを A の**プライムスペクトラム** (prime spectrum) や単に**スペクトラム** (spectrum) という．この位相を $\mathrm{Spec}(A)$ 上の**ザリスキー位相** (Zariski topology) という．

ザリスキー位相は T_0 であるが, 多くの場合ハウスドルフにならない．より詳しく述べると, 環のスペクトラムがハウスドルフになることと T_1 であることとその環の任意の素イデアルが極大イデアルであることは同値である．とくに, 一点が閉であるとも限らない．

命題 4.3. 環 A の元 f について $D(f) \coloneqq \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f)$ とおくとこれはザリスキー位相に関して開基をなす．この形の開集合を**基本開集合** (principal open subset) という．

補題 4.4. 環 A とその元 f, g について次が成り立つ．

(1) $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.
(2) $D(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \in \sqrt{(0)}$.
(3) $D(f) = \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow f \in A^{\times}$.
(4) $D(g) \subset D(f) \Leftrightarrow \sqrt{(g)} \subset \sqrt{(f)}$.
(5) $D(f)$ は準コンパクトである．

点 $x \in \mathrm{Spec}(A)$ を A の素イデアルとして捉えたいときに $\mathfrak{p}_x$ と書くことが多い．ここで定義 3.4 の類似を考える．

記法 4.5. $\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合 T について

$$I(T) \coloneqq \bigcap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p}$$

と定めるとこれはイデアルになる．ただし，$I(\emptyset) = A$ である．また，$T \mapsto I(T)$ は包含関係を逆にするような対応である．

V と I は 命題 3.9 や 系 3.10 のように次の関係がある．

命題 4.6. A を環としそのイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合 Y を取るとき次が成り立つ

(1) $\sqrt{I(Y)} = I(Y)$.
(2) $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, $V(I(Y)) = \overline{Y}$. ただし $\overline{Y}$ は $\mathrm{Spec}(A)$ における Y の閉包.
(3) 次は一対一の対応になっている．

$$\begin{gathered}\{\text{A の根基イデアル } \mathfrak{a}\} \longleftrightarrow \{\mathrm{Spec}(A) \text{ の閉集合 } Y\} \\ \mathfrak{a} \longrightarrow V(\mathfrak{a}) \\ I(Y) \longleftarrow Y.\end{gathered}$$

定義 4.7 (剰余体). 環 A とその素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して

$$\kappa(\mathfrak{p}) \coloneqq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$$

は体であり，これを $\mathfrak{p}$ における**剰余体** (residue field) という．

代入という操作をより一般化することで任意の環の元は “関数” のように振る舞う．このときとくに系 3.8 の類似であることに注意する．

定義 4.8 (代入). 環 A とその元 $f \in A$ と $x \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し, f への x の**代入**とは f の $\kappa(\mathfrak{p}_x)$ への標準的な像のことを指す. 誤解のない範囲でこれを $f(x)$ とかき, x の f への**代入**と呼ぶこととする. すなわち

$$\begin{aligned} f(x) &\coloneqq \frac{f}{1} + \mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x} &&\in A_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x} \\ &= \frac{f + \mathfrak{p}_x}{1 + \mathfrak{p}_x} &&\in \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}_x) \end{aligned}$$

となっている.

注意 4.9. 環 $k[T_1, \ldots, T_n]$ とその極大イデアル $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$ に対して代入を考えると, 同型写像

$$\begin{aligned} k[T_1, \ldots, T_n] &\longrightarrow k \\ T_i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

によって $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m} \cong k$ となっているから f への $\mathfrak{m}$ の代入は多項式の意味での f への $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ の代入と同一視される.

4.2 環のスペクトラムの間の射

環の間の射 $\varphi\colon A \to B$ に対して環のスペクトラムの間の射 ${}^a\varphi$ が定まる.

定義 4.10 (環のスペクトラムの射). 環の準同型 $\varphi\colon A \to B$ と $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ に対して $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ が A の素イデアルであることから次の写像が定まる.

$$\begin{aligned} {}^a\varphi = \mathrm{Spec}(\varphi)\colon\ \mathrm{Spec}(B) &\longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}). \end{aligned}$$

命題 4.11. ${}^a\varphi$ について次が成り立つ.

(1) 任意の部分集合 $M \subset A$ に対して

$${}^a\varphi^{-1}(V(M)) = V(\varphi(M)).$$

とくに A の元 f について

$${}^a\varphi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f)).$$

とくに ${}^a\varphi$ はザリスキー位相に関して連続写像である.

Spec は環の圏から位相空間の圏への反変関手であると言っても良い.

4.3 環のスペクトラムの例

$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y])$ と $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$ など以下では環のスペクトラムが実際にどの様になっているかを見ていく．主に [Bo] の第 6 講を参考にした．他の例については第 7 講を参考にしてほしい．

例 4.12. $A = \mathbb{C}[X,Y]$ とおき, $X = \mathrm{Spec}(A)$ とする．このとき,

$$X = \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \text{ は } A \text{ における既約多項式}\} \cup \{(X-x, Y-y) \mid (x,y) \in k^2\}$$

である．

ここで, $(X-x, Y-y)$ を $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ に対応させ, また, 命題 4.6 によって $\mathfrak{p} \in X$ に一対一に対応する $V(\mathfrak{p})$ を考える．これによって X の点を $\mathbb{C}^2$ 上に描くことができる．それぞれ,

$$\begin{array}{rcl} V((0)) & \longleftrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ V((f)) & \longleftrightarrow & \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\} \\ V((X-x, Y-y)) & \longleftrightarrow & \{(x,y)\} \end{array}$$

と対応している．点に対してそれを含むような素イデアルを考えてそれらを結ぶことでその点の形がわかる．このように環のスペクトラムを考えることで $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ の点よりもより広い意味での点を扱うことができる．また, 代数閉体ではない場合でも点を考えることができる．

例 4.13. $A = \mathbb{Z}[X]$ とおき, $X = \mathrm{Spec}(A)$ とする．このとき,

$$X = \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \text{ は原始既約多項式}\} \cup \{(p) \mid p \text{ は素数}\} \cup \{(p,f) \mid p \text{ は素数で } f \text{ は } \mathbb{F}_p[X] \text{ 上既約多項式}\}$$

となっている．ただし, ここで f が既約多項式とは, f がその次数より低い正の次数を持つ多項式に分解されないもののことであり, 原始的であるとは f の係数の最大公約元が単元であることである．

実際に $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$ が上記のようになっていることは埋め込み $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[X]$ から誘導されるスペクトラム上の射を考えてそのファイバーを見れば良い．図は [MO, p.120] を参照していただきたい．

4.4 層

ここまでで環からそれを関数とするような空間を作ることが出来た．しかしながらこの空間だけでは必ずしも環と一対一に対応するとは限らない．例えば $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^2))$ と $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^3))$ はともに位相空間としては一点集合であり区別がつかない．これらを区別しなければ良い対応とは言えない．そのために $\mathrm{Spec}(A)$ に対して新しい構造を付加する．ここで, A が関数としてみなせるということをより詳しく考えることとする．このときに 定義 4.8 を用いると見通しが良い．環 A の元 f と $x \in \mathrm{Spec}(A)$ について $1/f(x)$ が定義できるかどうかを考えると, これは $f + \mathfrak{p}_x \neq 0 + \mathfrak{p}_x$ と同値なので $f \notin \mathfrak{p}$ となる．すなわち $D(f)$ 上では $1/f$ が定義できる．これより, $D(f)$ 上の "関数" として A_f を考えることができる．

一方, 関数と捉えるためには制限や張り合わせを考えなくてはならない．それを適切に考えるための道具として層がある．ここではそれを定義する．詳細な証明や命題は [GW] を参考にしてもらいたい．

定義 4.14 (環の前層). X を位相空間とする．対応 $\mathscr{F}$ と X の開集合 $U \subset V$ に対応して得られる射 $\mathrm{res}^V_U \colon \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ の組 $(\mathscr{F}, \mathrm{res}^V_U)_{U\subset V\subset X}$ が次の条件を満たすときこれを X 上の**環の前層** (presheaf) という．res を**制限写像**という．

(a) 任意の X の開集合 U に対して $\mathscr{F}(U)$ は環.
(b) 開集合 $U \subset V$ に対して $\mathrm{res}^V_U \colon \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ は次を満たす環の準同型.
  (1) 任意の開集合 $U \subset X$ に対して $\mathrm{res}^U_U = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$.
  (2) 開集合 $U \subset V \subset W$ に対して $\mathrm{res}^W_U = \mathrm{res}^V_U \circ \mathrm{res}^W_V$.

$U \subset V$ と $s \in \mathscr{F}(V)$ について $\mathrm{res}^V_U(s)$ を $s|_U$ と書く．また $\mathscr{F}(U)$ の元を U 上 $\mathscr{F}$ の**切断** (section) という．

定義 4.15 (環の層). 環の前層 $\mathscr{F}$ が次の条件を満たすとき $\mathscr{F}$ を環の**層** (sheaf) という．任意の開集合 U とその任意の開被覆 U_i について

(a) $s, s' \in \mathscr{F}(U)$ が任意の $i \in I$ について $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ のとき $s = s'$ となる.
(b) 任意の $i \in I$ について $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ を満たしているとき, ある $s \in \mathscr{F}(U)$ が存在して $s|_{U_i} = s_i$ となる.

定義 4.16. 位相空間 X 上の前層 $\mathscr{F}$ と $\mathscr{G}$ について**前層の準同型** $\varphi \colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ とは環の準同型の集まり $(\varphi_U \colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U))$ であって開集合 $U \subset V$ について $\mathrm{res}^V_U \circ \varphi_V = \varphi_U \circ \mathrm{res}^V_U$ となるものである．層の準同型はそれを前層とみなしたときの準同型である.

注意 4.17. X 上の開集合とその包含写像による圏を (Ouv_X) と書くとき, 環の前層は (Ouv_X) から (Ring) への反変関手, 前層の準同型はその反変関手の間の自然変換と同じである.

例 4.18. 位相空間 X とその開集合 U について

$$\mathscr{C}(U) \coloneqq \{f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続写像}\}$$

と定義する．制限写像を写像の制限とすることで $\mathscr{C}$ は X 上の層になる.

一方, $f(U) \subset \mathbb{R}$ が有界となるように条件を付け加えると一般にこれは前層であるが層にはならない.

前層から層を作ることができる．前層と層の違いは 定義 4.15 であるので, 局所的なデータから大域的なデータを構成できるようにして前層を層にすればよい.

定義 4.19 (茎). 位相空間 X とその上の前層 $\mathscr{F}$ を取る．点 $x \in X$ についてその開近傍 $U \subset X$ に対し $((\mathscr{F}(U)), (\mathrm{res}^V_U)_{U\subset V})$ は順系を成し, その順極限

$$\mathscr{F}_x \coloneqq \varinjlim[x \in U]\mathscr{F}(U)$$

を $\mathscr{F}$ の x における**茎** (stalk) という.

注意 4.20. $\mathscr{F}_x$ は x の開近傍 U と切断 $s \in \mathscr{F}(U)$ の組 (U, s) の同値類とみなすこともできる．このとき, 同値関係 $(U_1, s_1) \sim (U_2, s_2)$ はある x の開近傍 $V \subset U_1 \cap U_2$ において $s_1|_V = s_2|_V$ であることと定義する．

> **命題 4.21 (前層の層化).** 位相空間 X とその上の前層 $\mathscr{F}$ について任意の X 上の層 $\mathscr{G}$ と任意の前層の準同型 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対してあるただ一つの層の準同型 $\tilde{\varphi}\colon \tilde{\mathscr{F}} \to \mathscr{G}$ が存在して $\tilde{\varphi} \circ \iota_{\mathscr{F}} = \varphi$ となるような条件を満たす, 同型を除いて一意的な層 $\tilde{\mathscr{F}}$ とその間の準同型 $\iota_{\mathscr{F}}\colon \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$ が取れる．
>
> とくに $\iota_{\mathscr{F},x}\colon \mathscr{F}_x \to \tilde{\mathscr{F}}_x$ は全単射であり, 任意の前層の準同型 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ について唯一の層の準同型 $\tilde{\varphi}\colon \tilde{\mathscr{F}} \to \tilde{\mathscr{G}}$ が存在して $\tilde{\varphi} \circ \iota_{\mathscr{F}} = \iota_{\mathscr{G}} \circ \varphi$ が成り立つ．この層 $\tilde{\mathscr{F}}$ を $\mathscr{F}$ から誘導される層や $\mathscr{F}$ の**層化** (sheafification) という．

ここで, 今定義した準同型は同じ位相空間の上の場合にのみ限っているため, 異なる位相空間の上の (前) 層の準同型を定義するために, どちらか一方の層を一方の位相空間の上に移す必要がある．

> **命題 4.22 (前層の順像).** 位相空間 X と Y とその間の連続写像 $f\colon X \to Y$ をとる．X 上の前層 $\mathscr{F}$ について Y 上で $f_*\mathscr{F}$ を
>
> $$f_*\mathscr{F}(U) \coloneqq \mathscr{F}(f^{-1}(U))$$
>
> と定義する．制限写像は $\mathscr{F}$ の制限写像を用いることでこれは Y 上の前層になり, これを $\mathscr{F}$ の f による**順像** (direct image) といい, $f_*\mathscr{F}$ と書く．とくに $\mathscr{F}$ が X 上の層であるとき $f_*\mathscr{F}$ は Y 上の層になる．

> **命題 4.23 (前層の逆像).** 位相空間 X と Y とその間の連続写像 $f\colon X \to Y$ をとる．Y 上の前層 $\mathscr{F}$ について X 上で
>
> $$U \longmapsto \varinjlim[f(U) \subset V]\mathscr{F}(V)$$
>
> と定義する．制限写像は順極限へ $\mathscr{F}$ の制限写像から誘導されるものをとる．これは X 上の前層となっており, $f^+\mathscr{F}$ と書く．その層化を $f^{-1}\mathscr{F}$ と書き, これを $\mathscr{F}$ の f による**逆像** (inverse image) という．

逆像の定義は $f(U)$ を開集合で可能な限り近似している．

位相空間 X, Y, Z と連続写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ と $\mathscr{H}$ を Z の層とする．$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{H})$ を考える．X の開集合 U を固定する．Z の開集合 W が $g(f(U))$ を含むこととある $f(U)$ を含む開集合 $V \subset Y$ が存在して W が $g(V)$ を含むことが同値であるので

$$f^+(g^+\mathscr{H}) = (g \circ f)^+\mathscr{H}$$

が成り立つ．ここから層化の一意性を用いれば $f^{-1}(g^{-1}\mathscr{H}) = (g \circ f)^{-1}\mathscr{H}$ が成り立つ．X の点 x について包含写像 $i\colon \{x\} \to X$ をとると定義から

$$i^{-1}\mathscr{F} = \mathscr{F}_x$$

となる．以上よりとくに Y の層 $\mathscr{G}$ について $(f^{-1}\mathscr{G})_y = \mathscr{G}_{f(y)}$ となることがわかる．

定理 4.24. $f\colon X \to Y$ を連続写像とし, X 上の層 $\mathscr{F}$ と Y 上の前層 $\mathscr{G}$ について次の全単射がある.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sh}(X))}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) &\longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{(\mathrm{PreSh}(Y))}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}), \\ \varphi &\longmapsto \varphi^\flat, \\ \psi^\sharp &\longleftarrow\!\shortmid\ \psi. \end{aligned}$$

これは $\mathscr{F}$ と $\mathscr{G}$ について関手的である.

注意 4.25. $\psi_x^\sharp$ は次のように考えることが出来る. $f(x)$ の開近傍 $V \subset Y$ について $f^{-1}(V)$ は x の開近傍だから

$$\mathscr{G}(V) \xrightarrow{\psi_V} \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \to \mathscr{F}_x$$

となる. ただし 2 つ目の射は順極限への自然な射である. ここで左辺の V について順極限をとれば $\psi^\sharp$ の構成を考えると $\psi_x^\sharp\colon \mathscr{G}_{f(x)} \to \mathscr{F}_x$ とっている.

定義 4.26 (環付き空間). 位相空間 X とその上の環の層 $\mathscr{O}_X$ の組 $(X, \mathscr{O}_X)$ を**環付き空間** (ringed space) という.

環付き空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ について環付き空間の準同型とは連続写像 $f\colon X \to Y$ と Y 上の層の準同型 $f^\flat\colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ の組 $(f, f^\flat)$ のことである.

定理 4.24 より $f^\sharp\colon f^{-1}\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ を $f^\flat$ の代わりにとっても良い. $f^\flat$ や $f^\sharp$ は f から作られるというわけではない.

$\mathscr{O}_X$ を $(X, \mathscr{O}_X)$ の構造層といい, $(X, \mathscr{O}_X)$ を単に X と, $(f, f^\flat)$ や $(f, f^\sharp)$ を f と書くことが多い.

定義 4.27. 任意の X の点 x についてその茎 $\mathscr{O}_{X,x}$ が局所環であるとき, $(X, \mathscr{O}_X)$ を**局所環付き空間** (locally ringed space) という.

局所環付き空間の間の準同型 $(f, f^\sharp)$ とは環付き空間の準同型であり, 任意の $x \in X$ について茎に誘導される写像

$$f_x^\sharp\colon (f^{-1}\mathscr{O}_Y)_x = \mathscr{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,x}$$

が局所準同型であるもののことを言う. すなわち, 極大イデアル $\mathfrak{m}_{f(x)} \subset \mathscr{O}_{Y,f(x)}$ と $\mathfrak{m}_x \subset \mathscr{O}_{X,x}$ について $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subset \mathfrak{m}_x$ となる.

ここで, $\mathscr{O}_{X,x}$ を x における X の局所環といい, その極大イデアルを $\mathfrak{m}_x$ と書く. x を "関数" $f \in \mathscr{O}_X(U)$ に代入した $f(x)$ を f の $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_{X,x} \to \kappa(x)$ への標準的な像と考えることとする.

環付き空間ではなく, 局所環付き空間を考える理由として切断をその開集合の上の関数だと思っているということが挙げられる. 実際, そのようにみなすと $\mathscr{O}_{X,x}$ は点 x 回りの関数でありこれは x で 0 になるかならないかでわけることができる. すなわち, 0 になるものは x の近傍で可逆ではないので $\mathfrak{m}_x$ の元になる. 0 にならないものは可逆になるから $\mathscr{O}_{X,x}^\times$ の元にとなり, 実際に $\mathscr{O}_X$ が局所環になる. 局所環付き空間の準同

型 $(f, f^\flat)\colon X \to Y$ として関数に f を "合成" する写像とみなすことで局所環付き空間の間の準同型が局所準同型になるようなものを取っておく理由がわかる．もう少し正確に述べると, Y 上の $f(x)$ で消える関数 $s \in \mathscr{O}_Y(U)$ があったとする．それを $\mathscr{O}_X(U)$ に移す写像を s と f を "合成" するものとすると x でそれは消える．すなわち $\mathfrak{m}_x$ に入るということであるのでたしかに局所準同型になる．

例 4.28. 例 4.18 を連続写像 $f\colon X \to Y$ について考えるとき, $f^\flat\colon \mathscr{C}_Y \to f_*\mathscr{C}_X$ を次のように定義できる．

$$\begin{aligned} f^\flat_V\colon \mathscr{C}_Y(V) &\longrightarrow \mathscr{C}_X(f^{-1}(V)), \\ t &\longmapsto t \circ f. \end{aligned}$$

これから $f(x)$ での茎を考えると

$$\begin{aligned} f^\flat_{f_x}\colon \mathscr{C}_{Y,f(x)} &\longrightarrow \mathscr{C}_{X,x}, \\ (t, U) &\longmapsto (t \circ f, U) \end{aligned}$$

となり, 前述したとおりこれは代入と合成を考えることで確かに局所準同型になっている．

層構造を考えるとき, その開基の上で層構造を考えれば十分であることがわかる．

> **定理 4.29.** 位相空間 X の開基 $\mathcal{B}$ が有限個の共通部分を取る操作で閉じていて, 前層 $\mathscr{F}$ が任意の $U \in \mathcal{B}$ と $U_i \in \mathcal{B}$ による任意の開被覆 $U_i \in \mathcal{B}$ について層の条件を満たすとき,
>
> $$\mathscr{F}'(V) \coloneqq \varprojlim[U \subset V]\mathscr{F}(U) = \{(s_U) \in \prod_{\mathcal{B} \ni U \subset V} \mathscr{F}(U) \mid U \subset U' \subset V \to \rho^{U'}_U(s_{U'}) = s_U\}$$
>
> とすると $\mathscr{F}'$ は X 上の層になる．

4.5 アファインスキーム

環 A のスペクトラム (の開基) 上に層を定める．$X = \mathrm{Spec}(A)$ とおく．ここで, 命題 4.3 から $\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ は開基であり, さらに $D(f)$ 上で f の逆元が取れてほしい．そこで $\mathscr{O}_X(D(f)) \coloneqq A_f$ と定義する．ここで $f \neq g \in A$ について $D(f) \neq D(g)$ とは限らないことに注意する．また, $D(g) \subset D(f)$ のとき確かに A_f から A_g へ制限写像を定義できる．

> **定理 4.30.** $\mathscr{O}_X$ は $\mathcal{B}$ 上の層になっている．

証明. 制限写像のみ明示的に書く．$D(g) \subset D(f)$ のとき補題 4.4 よりある正整数 n と $\alpha \in A$ で $g^n = f\alpha$ となる．すなわち $f/1 \in (A_g)^\times$ であるので次が定義できる (局所化の普遍性からと言っても良い)．

$$\begin{aligned} \rho_{f,g}\colon A_f &\longrightarrow A_g \\ a/f &\longmapsto af^{-1} = a\alpha/g^n. \end{aligned}$$

これによって $(\mathscr{O}_X(D(f)), \rho_{f,g})_{D(f) \in \mathcal{B}}$ は $\mathcal{B}$ 上の層になる． □

定理 4.29 より $\mathrm{Spec}(A)$ 上に層 $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ が誘導される．とくに $\mathscr{O}_{X,x}=\varinjlim[x\in D(f)]\mathscr{O}_X(D(f))=A_{\mathfrak{p}_x}$ である．

定義 4.31 (アファインスキーム). 局所環付き空間 $(X,\mathscr{O}_X)$ が**アファインスキーム** (Affine scheme) であるとは，ある環 A が存在して $(\mathrm{Spec}(A),\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ と同型になることである．アファインスキームの準同型は局所環付き空間としての準同型のことを指す．

代表的なものとして環 R 上の多項式環 $R[T_1,\dots,T_n]$ から得られるアファインスキーム $\mathrm{Spec}(R[T_1,\dots,T_n])$ をアファイン空間といい，$\mathbb{A}^n_R$ と書く．アファインスキーム間の準同型を環の準同型から作る．

命題 4.32. 環 A と B とその間の環準同型 $\varphi\colon A\to B$ について $X=\mathrm{Spec}(B)$, $Y=\mathrm{Spec}(A)$ とするとき $f:={}^a\varphi\colon X\to Y$ とおく．$f^\flat\colon\mathscr{O}_Y\to f_*\mathscr{O}_X$ を基本開集合上で次のように定める．

$$\begin{aligned} f^\flat_{D(s)}\colon \mathscr{O}_Y(D(s))=A_s &\longrightarrow B_{\varphi(s)}=f_*\mathscr{O}_X(D(s)) \\ a/s^n &\longrightarrow \varphi(a)/\varphi(s)^n. \end{aligned}$$

このとき $(f,f^\flat)$ はアファインスキームの準同型になる．

証明. 任意の $s\in A$ について命題 4.11 より $f^{-1}(D(s))=D(\varphi(s))$ がなりたつ．$f^\flat$ は 基本開集合上の制限写像と可換である．基本開集合が開基を成していることからこれによって $f^\flat\colon\mathscr{O}_Y\to f_*\mathscr{O}_X$ が Y 上で定義できる．

また，任意の $x\in X$ について

$$f^\sharp_x\colon\mathscr{O}_{Y,f(x)}=A_{\mathfrak{p}_{\varphi^{-1}(x)}}\longrightarrow B_{\mathfrak{p}_x}=\mathscr{O}_{X,x}$$

は注意 4.25 から φ から誘導される準同型を考えればよく，それは局所準同型になっている．したがって $(f,f^\flat)$ はアファインスキーム X と Y の間の準同型になっている． □

アファインスキームの例をいくつか挙げる．

例 4.33 (基本開集合上のアファインスキーム). $X=\mathrm{Spec}(A)$ をアファインスキームとする．ここで $f\in A$ について $A\to A_f$ で定義されるアファインスキームの準同型 $(j,j^\sharp)\colon\mathrm{Spec}(A_f)\to\mathrm{Spec}(A)$ をとる．このとき j は $\mathrm{Spec}(A_f)$ から $D(f)$ への同相写像になる．また，任意の $x\in D(f)$ について $j^\sharp_x$ は $A_{\mathfrak{p}_x}\cong(A_f)_{\mathfrak{p}_x}$ をみたしているので $(j,j^\sharp)$ はアファインスキーム $\mathrm{Spec}(A_f)$ と $(D(f),\mathscr{O}_{X|D(f)})$ の間のアファインスキームとしての同型を誘導する．

例 4.34 (アファインスキームの閉部分スキーム). $X=\mathrm{Spec}(A)$ をアファインスキームとする．ここでイデアル $\mathfrak{a}\subset A$ について標準的全射 $A\to A/\mathfrak{a}$ から誘導されるアファインスキームの準同型 $(i,i^\sharp)\colon\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})\to\mathrm{Spec}(A)$ について，イデアルの一対一対応定理から i は $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ から $V(\mathfrak{a})$ への同相写像となる．この同相写像により $V(\mathfrak{a})$ 上に局所環付き空間の構造を誘導し，それを改めて $V(\mathfrak{a})$ で表す．

例 4.35. 環 A とそのイデアル $\mathfrak{a}$ について A の素イデアルが $\mathfrak{a}$ を含んでいることとある正整数 n について $\mathfrak{a}^n$ を含んでいることは同値であるため，$\mathrm{Spec}(A)$ の閉部分集合 $V(\mathfrak{a}^n)$ は n によらない．しかし，アファインス

キームとしてみると例えば大域切断を比較することで, $V(\mathfrak{a}^n)=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)$ は n に依存する.

4.6 圏同値 2

$\varphi\colon A\to B$ から作られた $({}^a\varphi, {}^a\varphi^\flat)$ を単に $\mathrm{Spec}(\varphi)$ や ${}^a\varphi$ と書くことが多い. また, もう一つの環準同型 $\psi\colon B\to C$ について ${}^a(\psi\circ\phi)={}^a\phi\circ{}^a\psi$ が成り立つので反変関手

$$\mathrm{Spec}\colon (\mathrm{Ring})\longrightarrow(\mathrm{Aff})$$

を得る. 一方, 環付き空間の間の準同型 $f\colon(X,\mathscr{O}_X)\to(Y,\mathscr{O}_Y)$ について大域切断

$$\Gamma(f):=f^\flat_Y\colon\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y)=\mathscr{O}_Y(Y)\to\Gamma(X,\mathscr{O}_x)=(f_*\mathscr{O}_X)=\mathscr{O}_X(X)$$

は環準同型になる. このときこれをアファインスキームに制限すると反変関手

$$\Gamma\colon(\mathrm{Aff})\longrightarrow(\mathrm{Ring})$$

を得る.

定理 4.36. 関手 Spec と Γ は環の圏とアファインスキームの圏の間の反変圏同値を定める.

ここで, この圏同値は環のスペクトラムではなく, あくまでアファインスキームとの圏同値であることに注意しなければならない. もし環のスペクトラムのみで考えると位相空間としてしか見ることが出来ず, 異なる環に対して同じ幾何学的対象が得られてしまう. その空間の上の "関数" まで考えて十分な同値が得られる.

5 スキーム

5.1 スキーム

局所的にユークリッド空間の開集合とみなせる多様体 (manifold) と同様に, 局所的にアファインスキームとみなせる多様体 (variety) としてスキームを定義する.

定義 5.1 (スキーム). 局所環付き空間 $(X,\mathscr{O}_X)$ がある開被覆 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ で任意の $i\in I$ で $(U_i,\mathscr{O}_{X|U_i})$ がアファインスキームと同型であるようなものが取れるときこれを**スキーム** (scheme) という. スキームの準同型とは局所環付き空間としての準同型のことをいう.

スキーム $(X,\mathscr{O}_X)$ を単に X と書くことがある. スキーム X の開集合について $(U,\mathscr{O}_{X|U})$ もスキームになりこれを**開部分スキーム** (open subscheme) という. また, 開部分スキームであってアファインスキームであるものを**アファイン開部分スキーム** (affine open subscheme) という. 基本開集合がアファインスキームの開基をなすことからアファイン開部分スキーム全体は X の開基をなす. X の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ がすべての $i\in I$ で U_i が X のアファイン開部分スキームであるとき, これを X の**アファイン開被覆** (affine open covering) という.

補題 5.2. X をスキームとし, そのアファイン開部分スキームとして U と V をとる. このとき任意の $U \cap V$ の元 x についてある x を含む開部分スキーム W であって $W \subset U \cap V$ かつ U と V の両方に対して基本開集合になるものが取れる.

スキームからアファインスキームへの射について次の結果が成り立つ.

> **定理 5.3.** $(X, \mathscr{O}_X)$ スキームとし, $Y = \mathrm{Spec}(A)$ をアファインスキームとする. このとき
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch})}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ring})}(A, \Gamma(X, \mathscr{O}_X)), \\ (f, f^\flat) &\longmapsto f^\flat_Y, \end{aligned}$$
>
> は全単射である.

証明は [Liu, Proposition 3.25] が参考になる.

この主張は X がスキームとは限らない局所環付き空間でも成り立つが筆者がその証明を追えていないため, ここではスキームに限って主張を述べた.

5.2 スキームの性質

スキームの性質の一例を挙げる.

> **定義 5.4 (有限型スキーム).** k を任意の体とし, k-スキーム $X \to \mathrm{Spec}(k)$ をとる. X がアファイン開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ であって $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ としたときに A_i が k 上有限生成代数であるものがとれるとき, X を**局所有限型 k-スキーム** (k-scheme locally of finite type) と言ったり, X は k **上局所有限型** (locally of finite type over$k$) であると言ったりする. X が準コンパクトであるときは局所をつけないか, または単に k **上代数的スキーム** (algebraic variety over$k$) ということもある.

局所有限型スキームを考える利点として次の命題がある. 本質的にヒルベルトの零点定理を用いている.

> **命題 5.5.** k を体として X を局所有限型 k-スキームとする. このとき点 $x \in X$ について次は同値.
>
> (1) $x \in X$ は閉点.
> (2) 体拡大 $k \hookrightarrow \kappa(x)$ は有限次拡大.
> (3) 体拡大 $k \hookrightarrow \kappa(x)$ は代数拡大.

ここで, $\kappa(x)$ は $\mathscr{O}_{X,x}$ がわかればわかるが, $\mathscr{O}_{X,x}$ は x の近傍だけ見ればよい. すなわち, 局所有限型であれば x はある開近傍の中で閉点であれば全体でも閉点になることがわかる.

そのほかのスキームの性質として, 整 (integral), ネーター (noetherian), 被約 (reduced) や分離 (separated) などがある. とくに [GW] では多様体 (variety) を代数閉体上有限型分離的整スキームとして定義している.

6 スキームにおける定理

以下では筆者が面白いと思った定理を紹介する．未定義語もあるが, 定理の雰囲気だけでもわかってもらえたら幸いである.

6.1 関数付き空間との対応

代数閉体 k について X を局所有限型 k-スキームとしたときに

$$\{x \in X \mid x \text{ は閉点}\} = \{x \in X \mid k = \kappa(x)\} = X(k) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k), X)$$

も成り立つ．このとき包含写像 $\alpha\colon X(k) \to X$ について $X(k)$ 上の層を層の逆像 $\mathscr{O}_{X(k)} \coloneqq \alpha^{-1}\mathscr{O}_X$ で定めると $(X(k), \mathscr{O}_{X(k)})$ は環付き空間になる.

定理 6.1. 対応 $(X, \mathscr{O}_X) \longmapsto (X(k), \mathscr{O}_{X(k)})$ は次の 2 つの圏の圏同値を導く.

(a) k 上有限型整スキームの圏

(b) k 上の前多様体 (prevariety) の圏.

6.2 ハルトークスの定理

複素解析のハルトークスの拡張定理の類似を考えることが出来る.

定理 6.2 (ハルトークスの拡張定理). 1 より大きい整数 n と開集合 $U \subset \mathbb{C}^n$ と $x \in U$ について $f\colon U \setminus \{x\} \to \mathbb{C}$ が正則であるとすると f は U 上の正則な関数に拡張できる.

定義 6.3. スキーム X が $x \in X$ で**正規** (normal) であるとは局所環 $\mathscr{O}_{X,x}$ が正規環であることである．すなわち, $\mathscr{O}_{X,x}$ の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ についてその局所化が整閉整域であること．任意の X の点で正規であるとき, X を正規であるという.

定理 6.4. X を正規局所ネータースキームとし, 開集合 $U \subset X$ について $\mathrm{codim}_X(X \setminus U) \geq 2$ であるとする．このとき制限写像 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ は全単射になる.

この証明には本質的に次の可換環論の結果が使われる.

補題 6.5. A をネーター整域とするとき, A が正規であることと

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A), \mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$$

であることは同値. 共通部分は A の商体の中で取っている.

例えば $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^2+X^3))$ について $\mathfrak{p}=(X,Y)$ では "分岐" しているため正規ではない.

6.3 ベズーの定理

定義 6.6. 定数ではない斉次多項式 $f\in k[X,Y,T]$ について $V_+(f)\subset\mathbb{P}^2_k$ の形になる閉部分スキームを**単純曲線** (plane curve) という.

定義 6.7. C, D を $\mathbb{P}^2_k$ の単純曲線であって, $Z:=C\cap D$ は次元 0 の k-スキームとなるものとする. このとき $i(C,D):=\dim_k(\Gamma(Z,\mathscr{O}_Z))$ を C と D の**交点数** (intersection number) という. $z\in Z$ について $i_z(C,D):=\dim_k(\mathscr{O}_{Z,z})$ を C と D の z における交点数という.

定理 6.8 (ベズーの定理). k を体とする. $C=V_+(f)$, $D=V_+(g)$ を $\mathbb{P}^2_k$ の単純曲線であって f と g が共通項を持たないものとする. このとき

$$i(C,D)=(\deg f)(\deg g)$$

がなりたつ. とくに $C\cap D$ は空集合ではなく, 有限個の閉点からなる.

例 6.9. $f=YT-X^2$ と $g=Y$ とする. $Z=V_+(f,g)$ は一点集合になり, T で非斉次化すると

$$\Gamma(Z,\mathscr{O}_Z)=k[U,V]/(V-U^2,V)=k[U]/(U^2)$$

となり, $\dim_k(\Gamma(Z,\mathscr{O}_Z))=2$ である. 実際, k^3 内の $T=1$ の平面を見てみると $Y-X^2$ と Y の交点数と (重複度込みで) 一致する.

参考文献

参考文献を以下に示す. 本発表は主に [GW] の 2 章までを参考にしている. 2020 年 7 月に誤植が修正された second edition が出版された. [Bo] は YouTube 上で公開されている一連の動画のプレイリストである.

[GW] U. Gortz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry Part I: Schemes. With Examples and Exercises*, Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[Iit] 飯高茂, 代数幾何学 I, 岩波書店, 1976.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[AM] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[Liu] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, 2006.

[Bo] R. E. Borcherds, *Algebraic geometry II: Schemes*. (2020 年 9 月 29 日アクセス)
https://www.youtube.com/playlist?list=PL8yHsr3EFj50Un2NpfPySgXctRQK7CLG-

[MO] D. Munford, T. Oda, *Algebraic Geometry II (a penultimate draft)*. (2020 年 9 月 16 日アクセス)

http://www.dam.brown.edu/people/mumford/alg_geom/papers/AGII.pdf