群のコホモロジーの長完全列と Hilbert の定理 90 について

https://ryo1203.github.io

2019 年 9 月 4 日

概要

ある群 G とそれが作用する加群 M について G の M 係数の p 次コホモロジー群 $H^p(G, M)$ $(p = 0, 1, 2, \dots)$ というものが定義される．今回の発表ではそのコホモロジーを素朴に定義し，そこからの初歩的な帰結としてコホモロジー長完全列の構成を行う．また，余力があればコホモロジー群の利用方法として $H^1(G, K^\times)$ と $H^1(G, K^+)$ を用いる Hilbert の定理 90 (Hilbert satz 90) の証明の紹介をする.

目次

1 Introduction

コホモロジーという言葉は多くの場合, de Rham コホモロジーなどとして幾何の文脈で出てくることが多い．それを群に対し,「その群の作用のズレを図る道具」として定義したのが群のコホモロジーである．群を考えるときにはそれがどのように作用するかを見ることが一つの手法になっているが, 例えば $H^0(G, M)$ は G の作用で M の元がどれくらい固定されるかを表しており, $H^1(G, M)$ は G から M への所謂捻れた準同型のようなものを考えている．より高次のコホモロジー群も定義され, また, その群が作用している他の加群との比較をするために長完全列というものがある．各加群の間にある良い性質がうまくコホモロジー群の長完全列を構成することと, 若干の体論の知識が必要となるが, そのズレが自明なものになるときの嬉しいこととして Hilbert の定理 90 を挙げる.

2 群のコホモロジーの定義

この章では (可換) 群のコホモロジー群を定義し, いくつかの計算例を述べる.

定義 2.1（G 加群） G を (可換とは限らない乗法) 群, M を可換 (加法) 群とする．写像 $\mu\colon G\times M\to M, (\sigma,x)\mapsto\sigma(x):=\mu(\sigma,x)$ が定義され, 任意の $\sigma,\tau\in G$ と $x,y\in M$ について次の三条件が満たされるとき, この群 M と写像 μ の組 (M,μ) を G **加群**という．

(1) $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$,
(2) $(\sigma\tau)(x)=\sigma(\tau(x))$,
(3) $1(x)=x$.

ただし, 1 は G の単位元である．とくに任意の $\sigma\in G$ と $x\in M$ について $\sigma(x)=x$ となるとき G **は** M **に自明に作用する**という．

以降は $\sigma(x)$ を単に σx と書くこととし, 写像を省略して M を G 加群という．

以下では上で述べたように G は (可換とは限らない) 群で M は G 加群として話を進める．
まずは G と M から作られる基本的な加法群を定義する．

定義 2.2（p コチェイン） $p\geq 0$ を自然数として G の p 個の直積を G^p とするとき以下のように G^p から M への写像全体の集合を $C^p(G,M)$ とおく．

$$C^p(G,M):=\{f\colon G^p\to M\}=\mathrm{Map}(G^p,M).$$

このとき, $f,g\in C^p(G,M)$ について和 $f+g$ を $(f+g)(\sigma_1,\ldots,\sigma_p):=f(\sigma_1,\ldots,\sigma_p)+g(\sigma_1,\ldots,\sigma_p)$ で定義する．$p=0$ については G^0 を 1 とみなし, $C^0(G,M):=M$ と定義すると $C^p(G,M)$ $(p\geq 0)$ はすべて加法群となる．

この $C^p(G,M)$ の各元を p **コチェイン (双対鎖)** (cochain) とよび, $C^p(G,M)$ 自体を p **コチェイン群**という．G,M が明らかなときはこれを C^p と略記し, 以降ではこのように書く．

次に, この加法群同士を結ぶ準同型写像を定義する．以下では p は常に $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の元であるとする．

定義 2.3（コバウンダリー作用素） 任意の非負整数 p について, C^p から C^{p+1} への写像 ∂^p (もしくは p が明らかなときは ∂) を以下のように定め, これを p **次コバウンダリー (双対境界) 作用素** (coboundary operator) とよぶ.

$$\begin{aligned}\partial^p\colon C^p &\longrightarrow C^{p+1}\\ f&\longmapsto \partial^p f.\end{aligned}$$

ただし, $\partial^p f$ は $(g_1,\ldots,g_{p+1})\in G^{p+1}$ について以下のように定義される C^{p+1} の元である．

$$\partial^p f(g_1,\ldots,g_{p+1})=g_1f(g_2,\ldots,g_{p+1})+\sum_{i=1}^{p}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{p+1})+(-1)^{p+1}f(g_1,\ldots,g_p).$$

これは明らかに C^p における加法群の準同型になっている．

例 2.4　$p=0$ のとき写像 $f \in C^0$ を M の元とみなせることに注意すると $\partial^0 f \in C^1$ は

$$\partial^0 f(g_1) = g_1 f - f$$

で与えられる.

$p=1,2$ のときはそれぞれの $f \in C^p$ について

$$\begin{aligned}\partial^1 f(g_1, g_2) &= g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1),\\ \partial^2 f(g_1, g_2, g_3) &= g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2)\end{aligned}$$

となる.

コバウンダリー作用素について次の著しい性質が成り立つ.

補題 2.5　任意の非負整数 p について $\partial^{p+1} \circ \partial^p = 0$.[*1]

コホモロジー群を定義するために, まずコサイクルとコバウンダリーを定義する.

定義 2.6（p 次コサイクルと p 次コバウンダリー）　以下のように定まる C^p の部分群 Z^p の元を p **次コサイクル (双対輪体)** (cocycle) という.

$$Z^p = Z^p(G, M) := \mathrm{Ker}(\partial^p).$$

また, 以下のように定まる C^p の部分群 B^p の元を p **次コバウンダリー (双対境界)** (coboundary) という.

$$B^p = B^p(G, M) := \mathrm{Im}(\partial^{p-1}).$$

ただし, $B^0 = 0$ と定める.

定義 2.7（p 次コホモロジー群）　$p \geq 1$ のとき補題 2.5 から $\partial^p \circ \partial^{p-1} = 0$ より $\partial^p(\mathrm{Im}(\partial^{p-1})) = 0$ であることと $p=0$ のとき $B^0 = 0 \subset Z^0$ であることより, 任意の非負整数 p で $B^p = \mathrm{Im}(\partial^{p-1}) \subset \mathrm{Ker}(\partial^p) = Z^p \subset C^p$ であるから, C^p/B^p の部分群として剰余群 Z^p/B^p が定義できる.

$$H^p = H^p(G, M) := Z^p(G, M)/B^p(G, M)$$

と書き, これを p **次コホモロジー群** (cohomology group) という.

例 2.8　$p=0$ のときのコホモロジー群 H^0 を計算する. 例 2.4 より $\partial^0 f(g) = gf - f$ だから

$$Z^0 = \mathrm{Ker}(\partial^0) = \{f \in C^0 = M \mid gf = f \ (\forall g \in G)\}$$

となる. これは M の元のうち G が作用しても動かないもの全体なので G による M の固定群 M^G である. そして, 定義から $B^0 = 0$ だから $H^0 = M^G/0 = M^G$ となる.

[*1] 自分が参考にした本では「直接の計算で確かめられる」や「ただちにわかる」と一言書いて証明が省かれていたが, 愚直に証明を行おうとすると膨大な計算量になる.

例 2.9　$p=1$ のときのコホモロジー群 H^1 を計算する．例 2.4 より $\partial^1 f(g_1,g_2)=g_1f(g_2)-f(g_1g_2)+f(g_1)$ だから

$$\begin{aligned} Z^1 &= \mathrm{Ker}(\partial^1)=\{f\in C^1 \mid f(g_1g_2)=g_1f(g_2)+f(g_1)\ (\forall g_1,g_2\in G)\},\\ B^1 &= \mathrm{Im}(\partial^0)=\{f\in C^1 \mid \exists f'\in C^0=M, f(g)=gf'-f'\ (\forall g\in G)\} \end{aligned}$$

となる．ここでとくに G の M に対する作用が $G\times M\to M, (g,x)\mapsto gx=x$ として自明なものであるとする．このとき $g_1f(g_2)=f(g_2)$ と $\partial^0 f(g)=gf-f=f-f=0$ から

$$\begin{aligned} Z^1 &= \{f\in C^1 \mid f(g_1g_2)=f(g_2)+f(g_1)(\forall g_1,g_2\in G)\},\\ B^1 &= 0 \end{aligned}$$

となる． Z^1 は群準同型の集合 $\mathrm{Hom}(G,M)$ にほかならないため，作用が自明であるとき，$H^1=\mathrm{Hom}(G,M)/0=\mathrm{Hom}(G,M)$ となる．

3　完全列と蛇の補題

以降で重要となる完全列と蛇の補題について述べる．

定義 3.1（完全列）　可換群と群準同型の列

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

が $\mathrm{Im}(f_i)=\mathrm{Ker}(f_{i+1})$ を満たすとき，この列は M_i で**完全** (exact) であるという．任意の i について M_i が完全であるときこの列は**完全** (exact) または**完全 (系) 列** (exact sequence)*2 であるといって列の末尾に (exact) を付けて表すことがある．

とくに $0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$ の形の完全列を**短完全列** (short exact sequence) という．ただし, $0\to M'$ は $0\mapsto 0\in M'$ で $M''\to 0$ は M'' のすべての元を 0 に飛ばす準同型である．

また, 群 G について, M_i が G 加群であり, f_i が G 加群の準同型である場合にも同様にして完全列が定義される．

以降では G 加群の完全列であることが明示されていない場合は, 完全列といったら可換群と群準同型による完全列であるということにする．完全列と写像の性質を結びつける命題として以下がある．

命題 3.2　完全列について次が成り立つ．

(1) $0\to M'\xrightarrow{f} M$ が完全 $\Longleftrightarrow$ f は単射．
(2) $M\xrightarrow{g} M''\to 0$ が完全 $\Longleftrightarrow$ g は全射．
(3) $0\to M'\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M''\to 0$ が完全であることと f が単射かつ g が全射で $\mathrm{Coker}(f)\cong M''$ が g により誘導されることは同値である．

ここで $\mathrm{Coker}(f)$ は f の余核 (cokernel) といい $\mathrm{Coker}(f)=M/\mathrm{Im}(f)$ で定義される．

証明　$0 \to M'$ と $M'' \to 0$ に注意して, 完全列の定義から言える.　□

今回の目的であるコホモロジー長完全列の構成は G 加群の短完全列から行う. そのために境界準同型, もしくは連結準同型という準同型写像をつくるが, その準同型の構成方法は有名な蛇の補題の証明中で作られるものと本質的に同じである. 本稿の長完全列の構成では見通しの観点から敢えて蛇の補題は使用しないものの, 完全列に関する有名な補題としてここで蛇の補題を紹介する.

注意 3.3　蛇の補題はより一般にホモロジー代数における完全ホモロジー列の場合で証明できるが, いまは可換群についてのみ考えたいので上で述べた通り可換群と群準同型での場合のみ考えることとする.

補題 3.4（蛇の補題）　次のような行が両方とも完全な可換な図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\phi_1"] & N \arrow[r, "\psi_1"] & N'' \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

このときある準同型 $d\colon \operatorname{Ker}(f'') \to \operatorname{Coker}(f')$ があり, 次の列が完全になる.

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(f') \xrightarrow{\phi_0'} \operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\psi_0'} \operatorname{Ker}(f'') \xrightarrow{d} \operatorname{Coker}(f') \xrightarrow{\phi_1'} \operatorname{Coker}(f) \xrightarrow{\psi_1'} \operatorname{Coker}(f'') \longrightarrow 0$$

証明　完全性は一つ一つ図式を追っていけば示せるため省略する. ここではコホモロジー長完全列でも類似物が出てくる d についてのみ言及する.

d の構成方法.　$d\colon \operatorname{Ker}(f'') \to \operatorname{Coker}(f')$ を, $z \in \operatorname{Ker}(f'')$ に対し, 以下のように $x \in N'$ をとり, $d(z) = x + \operatorname{Im}(f') \in \operatorname{Coker}(f')$ として定めたい.

$$\begin{tikzcd}
 & y := (\psi_0)^{-1}(z) \arrow[r, mapsto, "\psi_0"] \arrow[d, mapsto, "f"] & z \arrow[d, mapsto, "f''"] \\
x := (\phi_1)^{-1}(f(y)) \arrow[r, mapsto, "\phi_1"] & f(y) \arrow[r, mapsto, "\psi_1"] & 0
\end{tikzcd}$$

順に図式を追っていく. まず $z \in \operatorname{Ker}(f'')$ より $f''(z) = 0$ である. また $z \in M''$ から ψ_0 が全射であることよりある $y \in M$ がただ一つとは限らないが存在し, $\psi_0(y) = z$ となっている. これを形式的に $y := (\psi_0)^{-1}(z)$ と書く. このとき図式の可換性から $\psi_1(f(y)) = f''(\psi_0(y)) = f''(z) = 0$ より $f(y) \in \operatorname{Ker}(\psi_1)$ となる. $\operatorname{Ker}(\psi_1) = \operatorname{Im}(\phi_1)$ と ϕ_1 が単射であることよりある $x \in N'$ がただ一つ存在し, $\phi_1(x) = f(y)$ となるのでこれを $x := (\phi_1)^{-1}(f(y))$ と書く.

このように構成した d が写像になっていることを示す． 次の図式を用いる．

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "\phi_0"] \arrow[d, mapsto, "f'"] & y - y' = \phi_0(w) \arrow[r, mapsto, "\psi_0"] \arrow[d, mapsto, "f"] & \psi_0(y - y') = 0 \\
f'(w) \arrow[r, mapsto, "\phi_1"] & \phi_1(f'(w)) = f(\phi_0(w)) = f(y - y') &
\end{tikzcd}$$

上述のことから $y = (\psi_0)^{-1}(z)$ 以外は唯一に定まっているのでその部分を考えればよい． $y, y' \in M$ が $\psi_0(y) = \psi_0(y') = z$ を満たすとする．それぞれの y, y' で上のように定まる N' の元を x $(:= (\phi_1)^{-1}(f(y)))$, x' $(:= (\phi_1)^{-1}(f(y')))$ とおく．このとき $\psi_0(y - y') = 0$ から $y - y' \in \mathrm{Ker}(\psi_0) = \mathrm{Im}(\phi_0)$ よりある $w \in M'$ で $y - y' = \phi_0(w)$ と表される．そして, 図式の可換性から $f(y) - f(y') = f(y - y') = f(\phi_0(w)) = \phi_1(f'(w))$ であり $\phi_1(x - x') = \phi_1(x) - \phi_1(x') = f(y) - f(y') = \phi_1(f'(w))$ となっている．したがって ϕ_1 は単射なので $x - x' = f'(w) \in \mathrm{Im}(f')$ より $x + \mathrm{Im}(f') = x' + \mathrm{Im}(f')$ となるため $d(z)$ は $\psi_0^{-1}(z)$ のとり方によらないで確かに定義できている． □

4　長完全列

定理 4.1（コホモロジー長完全列の構成） G 加群 M_1, M_2, M_3 に対して, $C_i^p := C^p(G, M_i)$, $Z_i^p := Z^p(G, M_i)$, $B_i^p := B^p(G, M_i)$, $H_i^p := H^p(G, M_i)$ と書くことにする．また, p 次コバウンダリー作用素 $\partial^p \colon C_i^p \to C_i^{p+1}$ を ∂_i^p と書くことにする．このとき G 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_{12}} M_2 \xrightarrow{f_{23}} M_3 \longrightarrow 0$$

から以下のような行が完全列になっている可換な図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial_1^{p-2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial_2^{p-2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial_3^{p-2}"] & \\
0 \arrow[r, "f_{01}^{p-1}"] & C_1^{p-1} \arrow[r, "f_{12}^{p-1}"] \arrow[d, "\partial_1^{p-1}"] & C_2^{p-1} \arrow[r, "f_{23}^{p-1}"] \arrow[d, "\partial_2^{p-1}"] & C_3^{p-1} \arrow[r, "f_{30}^{p-1}"] \arrow[d, "\partial_3^{p-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r, "f_{01}^{p}"] & C_1^{p} \arrow[r, "f_{12}^{p}"] \arrow[d, "\partial_1^{p}"] & C_2^{p} \arrow[r, "f_{23}^{p}"] \arrow[d, "\partial_2^{p}"] & C_3^{p} \arrow[r, "f_{30}^{p}"] \arrow[d, "\partial_3^{p}"] & 0 \\
0 \arrow[r, "f_{01}^{p+1}"] & C_1^{p+1} \arrow[r, "f_{12}^{p+1}"] \arrow[d, "\partial_1^{p+1}"] & C_2^{p+1} \arrow[r, "f_{23}^{p+1}"] \arrow[d, "\partial_2^{p+1}"] & C_3^{p+1} \arrow[r, "f_{30}^{p+1}"] \arrow[d, "\partial_3^{p+1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

完全列であることから f_{12}^i は単射で f_{23}^i は全射である．このとき群準同型

$$\partial^* \colon H_3^p \longrightarrow H_1^{p+1}$$

> が定義され, 次の列が完全になる.
>
> $$\cdots \xrightarrow{\partial^*} H_1^p \xrightarrow{f_{12}^*} H_2^p \xrightarrow{f_{23}^*} H_3^p \xrightarrow{\partial^*} H_1^{p+1} \xrightarrow{f_{12}^*} H_2^{p+1} \xrightarrow{f_{23}^*} H_3^{p+1} \xrightarrow{\partial^*} \cdots$$
>
> これをコホモロジーの長完全列という. ただし, $i = 1, 2$ で,
>
> $$\begin{aligned} f_{i,i+1}^p \colon C_i^p &\longrightarrow C_{i+1}^p \\ x &\longmapsto f_{i,i+1} \circ x, \\ f_{i,i+1}^* \colon H_i^p &\longrightarrow H_{i+1}^p \\ x + B_i^p &\longmapsto f_{i,i+1}^p(x) + B_i^{p+1} \end{aligned}$$
>
> と定める.

証明 G 加群の完全列からこの f_{12}^p, f_{23}^p で行が完全な可換な図が得られることと, $f_{i,i+1}^*$ が well-defined な準同型写像になっていることは今回は認めることとし, とくに非自明である準同型 ∂^* の構成を (1)–(4) に分けて述べる. ただし, より一般の完全列に対して (1)–(3) は蛇の補題から境界準同型写像 $\partial^* \colon \mathrm{Ker}(\partial_3^p) = Z_3^p \longrightarrow \mathrm{Coker}(\partial_1^{p+1}) = C_1^{p+1}/B_1^{p+1}$ が存在することから示すことができる. (1) では終域が C_1^{p+1} よりさらに Z_1^{p+1} に狭まることを, (4) ではとくに $H_3^p \longrightarrow H_1^{p+1}$ で定義できるようになることが示される.

(1) 以下のような対応 ∂' を構成する:

$$\begin{aligned} \partial' \colon Z_3^p &\longrightarrow Z_1^{p+1} \\ z &\longmapsto x. \end{aligned}$$

証明では蛇の補題と同様に以下のように元をとっていく.

$$\begin{tikzcd}
 & y := (f_{23}^p)^{-1}(z) \arrow[r, mapsto, "f_{23}^p"] \arrow[d, mapsto, "\partial_2^p"] & z \arrow[d, mapsto, "\partial_3^p"] \\
x := (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y) \arrow[r, mapsto, "f_{12}^{p+1}"] \arrow[d, mapsto, "\partial_1^{p+1}"] & \partial_2^p(y) \arrow[r, mapsto, "f_{23}^{p+1}"] \arrow[d, mapsto, "\partial_2^{p+1}"] & 0 \\
\partial_1^{p+1}(x)(=0) \arrow[r, mapsto, "f_{12}^{p+2}"] & \partial_2^{p+1} \circ \partial_2^p(y) = 0 &
\end{tikzcd}$$

$z \in Z_3^p = \mathrm{Ker}(\partial^p) \subset C_3^p$ をとる. このとき f_{23}^p は全射なので $f_{23}^p(y) = z$ となる $y \in C_2^p$ が少なくとも一つ存在する. このうちの一つを y としてとり, 形式的に $y = (f_{23}^p)^{-1}(z)$ と書く. ここで図式が可換なことより $z \in \mathrm{Ker}(\partial_3^p)$ だから $f_{23}^{p+1} \circ \partial_2^p(y) = \partial_3^p \circ f_{23}^p(y) = \partial_3^p(z) = 0$ なので $\partial_2^p(y) \in \mathrm{Ker}(f_{23}^{p+1})$ である. 完全性より $\mathrm{Ker}(f_{23}^{p+1}) = \mathrm{Im}(f_{12}^{p+1})$ で f_{12}^{p+1} は単射である. よって, あるただ一つの $x \in C_1^{p+1}$ が存在して $f_{12}^{p+1}(x) = \partial_2^p(y)$ となるからこの x により $\partial^*(z) := x = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p \circ (f_{23}^p)^{-1}(z)$ として定める. 以上より $z \in Z_3^p$ に対して $y = (f_{23}^p)^{-1}(z)$ を一つ定めれば対応 $\partial' \colon Z_3^p \longrightarrow C_1^{p+1}$ が作られる.

ここで $\partial_1^{p+1}(x) = \partial_1^{p+1} \circ (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y)$ である. 図式が可換で f_{12} が単射だから $\partial_1^{p+1} \circ (f_{12}^{p+1})^{-1} = (f_{12}^{p+2})^{-1} \circ \partial_2^{p+1}$ である. 補題 2.5 から $\partial^{p+1} \circ \partial^p = 0$ であることに注意すれば f_{12}^{p+2} が単射であるこ

とから $\partial_1^{p+1}(x) = \partial_1^{p+1} \circ (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y) = (f_{12}^{p+2})^{-1} \circ \partial_2^{p+1}(\partial_2^p(y)) = (f_{12}^{p+2})^{-1}(0) = 0$ となるから $x \in \mathrm{Ker}(\partial_1^{p+1}) = Z_1^{p+1}$ となる．したがって対応 ∂' の終域を Z_1^{p+1} とすることができる．

(2)　対応 ∂' から以下のような写像 ∂'' が作られること:

$$\begin{aligned} \partial'' \colon Z_3^p &\longrightarrow H_1^{p+1} (:= Z_1^{p+1}/B_1^{p+1}) \\ z &\longmapsto \bar{\partial'(z)} = \bar{x} = x + B_1^{p+1}. \end{aligned}$$

いま $z \in Z_3^p$ に対し，$y, y' \in C_2^p$ が $f_{23}^p(y) = f_{23}^p(y') = z$ を満たすとして $x = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y)$, $x' = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y')$ とおく．このとき $x - x' \in B_1^{p+1}$ であれば $\bar{x} = \bar{x'}$ となるから $\partial''(z)$ が $(f_{23}^p)^{-1}(z)$ のとり方によらず定まる．したがって $x - x' \in B_1^{p+1}$ を示せばよい．

以下のような図式を用いる．

$$\begin{tikzcd} w := (f_{12}^p)^{-1}(y-y') \arrow[rr, mapsto, "f_{12}^p"] \arrow[d, mapsto, "\partial_1^p"] & & y - y' \arrow[r, mapsto, "f_{23}^p"] \arrow[d, mapsto, "\partial_2^p"] & f_{23}^p(y-y') = 0 \\ x - x' \arrow[r, mapsto, "f_{12}^{p+1}"] & f_{12}^{p+1}(x-x') = \partial_2^p(y-y') = f_{12}^{p+1} \circ \partial_1^p(w) & & \end{tikzcd}$$

$f_{23}^p(y-y') = f_{23}^p(y) - f_{23}^p(y) = z - z = 0$ より $y - y' \in \mathrm{Ker}(f_{23}^p) = \mathrm{Im}(f_{12}^p)$ であることに注意すると，$w := (f_{12}^p)^{-1}(y-y') \in C_1^p$ とおける．図式が可換なことより $f_{12}^{p+1} \circ \partial_1^p = \partial_2^p \circ f_{12}^p$ であるから，$f_{12}^{p+1} \circ \partial_1^p(w) = \partial_2^p \circ f_{12}^p((f_{12}^p)^{-1}(y-y')) = \partial_2^p(y-y')$ となる．$x - x' = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y) - (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y')$ なので $f_{12}^{p+1}(x-x') = \partial_2^p(y) - \partial_2^p(y') = \partial_2^p(y-y') = f_{12}^{p+1}(\partial_1^p(w))$ で f_{12}^p が単射なことから $x - x' = \partial_1^p(w) \in B_1^p$ より示された．

とくに, 以上のことから ∂'' は $y = (f_{23}^p)^{-1}(z)$ のとり方によらないので以下では逆像から任意に一つの元をとることとする．

(3)　写像 ∂'' が準同型になること．上で定めた z, z' と y, y' に対して $\partial''(z) = \bar{x}$, $\partial''(z') = \bar{x'}$, $x = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y)$, $x' = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y')$ とする．ここで f_{23}^p が準同型より $f_{23}^p(y+y') = f_{23}^p(y) + f_{23}^p(y') = z + z'$ だから $y + y' = (f_{23}^p)^{-1}(z+z')$ となる．また，$f_{12}^{p+1}, \partial_2^p$ が準同型より $f_{12}^{p+1}(x+x') = f_{12}^{p+1}(x) + f_{12}^{p+1}(x') = \partial_2^p(y) + \partial_2^p(y') = \partial_2^p(y+y')$ なので $x + x' = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^p(y+y')$ とできる．以上より $\partial''(z+z') = \overline{x+x'} = x + x' + B_1^{p+1} = (x + B_1^{p+1}) + (x' + B_1^{p+1}) = \bar{x} + \bar{x'} = \partial''(z) + \partial''(z')$ となるから ∂'' は準同型になる．

(4)　準同型写像 ∂'' から以下のような準同型写像 ∂^* が誘導されること:

$$\begin{aligned} \partial^* \colon H_3^p &\longrightarrow H_1^{p+1} \\ \bar{z} = z + B_3^p &\longmapsto \partial''(z) = \bar{x} = x + B_1^{p+1}. \end{aligned}$$

以下のような図式を用いる．

$$\begin{tikzcd}
& u = (f_{23}^{p-1})^{-1}(w) \arrow[r, mapsto, "f_{23}^{p-1}"] \arrow[d, mapsto, "\partial_2^{p-1}"] & w \arrow[d, mapsto, "\partial_3^{p-1}"] \\
& y = \partial_2^{p-1}(u) = (f_{23}^{p})^{-1} \circ \partial_3^{p-1}(w) \arrow[r, mapsto, "f_{23}^{p}"] \arrow[d, mapsto, "\partial_2^{p}"] & z = \partial_3^{p-1}(w) \\
x \arrow[r, mapsto, "f_{12}^{p+1}"] & 0 = \partial_2^{p} \circ \partial_2^{p-1}(u) &
\end{tikzcd}$$

まず $\partial''(B_3^p) = 0$ を示す．$B_3^p = \mathrm{Im}(\partial_3^{p-1})$ より B_3^p の任意の元 z はある $w \in C_3^{p-1}$ を用いて $\partial_3^{p-1}(w)$ と書かれる．ここで f_{23}^{p-1} が全射なので $f_{23}^{p-1}(u) = w$ となる $u \in C_2^{p-1}$ が存在する．図式が可換なことより $\partial_3^{p-1} \circ f_{23}^{p-1}(u) = f_{23}^{p} \circ \partial_2^{p-1}(u)$ であるので $\partial_3^{p-1}(w) = f_{23}^{p} \circ \partial_2^{p-1}(u)$ から $y = \partial_2^{p-1}(u)$ とおくと $y = (f_{23}^{p})^{-1} \circ \partial_3^{p-1}(w)$ となる．これより $\partial_2^{p} \circ \partial_2^{p-1} = 0$ に注意すれば $\partial''(z) = \partial''(\partial_3^{p-1}(w)) = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^{p}(y) = (f_{12}^{p+1})^{-1} \circ \partial_2^{p}(\partial_2^{p-1})(u) = 0$ となるので $z = \partial_3^{p-1}(w) \in \mathrm{Ker}(\partial'')$ より $\partial''(B_3^p) = 0$ である．

$\partial''(B_3^p) = 0$ であることが示されたので，$\bar{z} = \bar{z'}$ ならば $z - z' \in B_3^p$ から $\partial''(z) - \partial''(z') = \partial''(z - z') = 0$ だから ∂^* は代表元のとり方によらず，∂'' はすでに準同型写像なので $\partial^*(\bar{z}) = \partial''(z)$ から ∂^* も準同型である．したがって適切に ∂^* が誘導される．

以上より準同型写像 $\partial^* \colon H_3^p \longrightarrow H_1^{p+1}$ が構成された．定理の列が完全になることは各部分で核と像を確かめれば良い．示すべき包含関係の一部を示す．

$\mathrm{Im}(f_{23}^*) \subset \mathrm{Ker}(\partial^*)$ であること．以下のような図式を用いる．

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[r, mapsto, "f_{23}^{p}"] \arrow[d, mapsto, "\partial_2^{p}"] & z = f_{23}^{p}(y) \\
(f_{12}^{p+1})^{-1}(\partial_2^p(y)) = 0 \arrow[r, mapsto, "f_{12}^{p+1}"] & \partial_2^p(y) = 0 &
\end{tikzcd}$$

$z + B_3^p \in \mathrm{Im}(f_{23}^*)$ を任意にとると，ある $y \in Z_2^p$ が存在して $z + B_3^p = f_{23}^*(y + B_2^p) = f_{23}^p(y) + B_3^p$ となる．このとき z の f_{23}^p による逆像としてこの y をとれるので ∂^* の定義から $\partial^*(z + B_3^p) = \partial^*(f_{23}^p(y) + B_3^p) = (f_{12}^{p+1})^{-1}(\partial_2^p(y)) + B_1^{p+1}$ であるが，$y \in Z_2^p$ と f_{12}^{p+1} の単射性から $\partial^*(z + B_3^p) = 0 + B_1^{p+1}$ となるので $\mathrm{Im}(f_{23}^*) \subset \mathrm{Ker}(\partial^*)$ となる．

$\mathrm{Im}(\partial^*) \subset \mathrm{Ker}(f_{12}^*)$ であること．以下のような図式を用いる．

$$\begin{tikzcd}
& y = (f_{23}^{p})^{-1}(z) \arrow[r, mapsto, "f_{23}^{p}"] \arrow[d, mapsto, "\partial_2^{p}"] & z \\
x \arrow[r, mapsto, "f_{12}^{p+1}"] & \partial_2^p(y) &
\end{tikzcd}$$

$x+B_1^{p+1}\in \mathrm{Im}(\partial^*)$ を任意にとると, ある $z\in Z_3^p$ が存在して $\partial^*(z+B_3^p)=x+B_1^{p+1}$ となる. このときある元 $y=(f_{23}^p)^{-1}(z)$ をとると $x+B_1^{p+1}=(f_{12}^{p+1})^{-1}(\partial_2^p(y))+B_1^{p+1}$ である. よって $f_{12}^*(x+B_1^{p+1})=f_{12}^{p+1}((f_{12}^{p+1})^{-1}(\partial_2^p(y)))+B_2^{p+1}=\partial_2^p(y)+B_2^{p+1}=0+B_2^{p+1}$ であるので $\mathrm{Im}(\partial^*)\subset \mathrm{Ker}(\partial^*)$ となる. □

このようにして完全列から新しい長完全列が構成される. これにより, コホモロジー群を計算することができる.

5 Hilbert の定理 90

群のコホモロジーを用いて Hilbert satz 90 を示す. 以下の補題を用いる.

補題 5.1（Dedekind の補題） $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ を体 K から K' への相異なる準同型 (体からの準同型なので必然的に単射である) とする. このとき K' の元 $\beta_1,\dots,\beta_m$ について任意の $\alpha\in K$ で

$$\beta_1\cdot\sigma_1(\alpha)+\cdots+\beta_m\cdot\sigma_m(\alpha)=0$$

となるならば $\beta_1=\cdots=\beta_m=0$ である.

以下の命題では $K=K'$ で, $\beta_i:=f(\tau_i)$ $(\tau_i\in \mathrm{Aut}(K))$ として考えている.

命題 5.2（自己同型群のコホモロジー） K を任意の体, G を K の自己同型群のある有限部分群とする. このとき, $K^\times$ を K の乗法群, K^+ を K の加法群とすると

1. $H^1(G,K^\times)=\{1\}$,
2. $H^1(G,K^+)=\{0\}$

が成り立つ. ただし $H^1(G,K^\times)$ の演算は乗法的に書き, $\{1\}$ は乗法の単位元のみからなる乗法群, $\{0\}$ は加法の単位元のみからなる加法群を表す.

証明 (1) f を $Z^1(G,K^\times)$ の任意の元とする. 乗法群で考えていることに注意すると $\partial f=1$ より G の任意の元 σ,τ について $\sigma(f(\tau))\cdot f(\sigma\tau)^{-1}\cdot f(\sigma)=1$ となる. $H^1(G,K^\times)=\{1\}$ のためには $f\in B^1(G,K^\times)$ を示せばよい. すなわち, ある $\alpha\in C^0=K^\times$ が存在して任意の $\sigma\in G$ に対して $f(\sigma)=\partial^0(\alpha)(\sigma)=\sigma(\alpha)\cdot\alpha^{-1}$ となればよい.

いま, 任意の $\xi\in K$ について

$$\sum_{\tau\in G} f(\tau)\cdot\tau(\xi)=0$$

とすると G が有限群であるからこれは有限和で $\tau\in G\subset \mathrm{Aut}(K)$ であるので Dedekind の補題より任意の $\tau\in G$ に対して $f(\tau)=0$ であるがこれは $f\in C^1(G,K^\times)$ から $f(\tau)\in K^\times$ に矛盾する. よってある $\xi\in K$ について

$$\gamma:=\sum_{\tau\in G} f(\tau)\cdot\tau(\xi)\neq 0$$

である. すると $\gamma\in K^\times$ である. この γ と任意の $\sigma\in G$ について, G が有限群であることと $f\in Z^1(G,K^\times)$

に注意すると

$$\begin{aligned}\sigma(\gamma) &= \sigma\left(\sum_{\tau\in G} f(\tau)\cdot\tau(\xi)\right) = \sum_{\tau\in G}\sigma(f(\tau))\cdot\sigma\tau(\xi) \\ &= \sum_{\tau\in G} f(\sigma)^{-1}\cdot f(\sigma\tau)\cdot\sigma\tau(\xi) = f(\sigma)^{-1}\sum_{\tau\in G} f(\sigma\tau)\cdot\sigma\tau(\xi) \\ &= f(\sigma)^{-1}\cdot\gamma\end{aligned}$$

より $\sigma(\gamma) = f(\sigma)^{-1}\cdot\gamma$ が成り立つ．よって $\alpha = \gamma^{-1}$ とおくと $\sigma(\alpha^{-1}) = \sigma(\alpha)^{-1}$ から $f(\sigma) = \sigma(\alpha)\cdot\alpha^{-1}$ なので主張が成り立つ.

(2)　f を $Z^1(G, K^+)$ の任意の元とする．加法群で考えていることに注意すると $\partial f = 0$ より G の任意の元 σ, τ について $\sigma(f(\tau)) - f(\sigma\tau) + f(\sigma) = 0$ が成り立つ．$H^1(G, K^+) = \{0\}$ のためには $f \in B^1(G, K^+)$ を示せばよい．すなわち, ある $\beta \in C^0 = K^+$ が存在して任意の $\sigma \in G$ に対して $f(\sigma) = \partial^0(\beta)(\sigma) = \sigma(\beta) - \beta$ となるものが存在すればよい.

いま, (1) と同様に Dedekind の補題から $\eta := \sum_{\tau\in G}\tau(\xi) \in K^\times$ である ξ が存在する．このとき任意の $\rho \in G$ について G が有限群であることより $\rho(\eta) = \sum_{\tau\in G}\rho\tau(\xi) = \eta$ であるので $\theta = -\eta^{-1}\xi$ とおくと

$$\begin{aligned}S(\theta) &:= \sum_{\rho\in G}\rho(\theta) = \sum_{\rho\in G}\rho(-\eta^{-1}\xi) = -\sum_{\rho\in G}\rho(\eta)^{-1}\rho(\xi) \\ &= -\eta^{-1}\sum_{\rho\in G}\rho(\xi) = -\eta^{-1}\eta = -1\end{aligned}$$

である．いま, $\beta := \sum_{\tau\in G} f(\tau)\cdot\tau(\theta) \in K$ とおけばこの β と任意の $\sigma \in G$ について G が有限群で $f \in Z^1(G, K^+)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\sigma(\beta) &= \sum_{\tau\in G}\sigma(f(\tau))\cdot\sigma\tau(\theta) = \sum_{\tau\in G}(f(\sigma\tau) - f(\sigma))\cdot\sigma\tau(\theta) \\ &= \left(\sum_{\tau\in G} f(\sigma\tau)\cdot\sigma\tau(\theta)\right) - f(\sigma)\left(\sum_{\tau\in G}\sigma\tau(\theta)\right) = \beta - f(\sigma)S(\theta) = \beta + f(\sigma)\end{aligned}$$

より $f(\sigma) = \sigma(\beta) - \beta$ なので成り立つ. □

これより, 体の巡回拡大に関する重要な定理の一つである Hilbert の定理 90 (Hilbert satz 90) を示すことができる．そこでは以下で紹介する体の拡大におけるトレースとノルムという概念を用いる．Hilbert の定理 90 では有限次 Galois 拡大 (とくに有限次巡回拡大) のみを考えるためその場合における事実を述べることとする.

定義 5.3（トレースとノルム）　体 K と有限 K 代数 A とその元 $x \in A$ について

$$\begin{aligned}T_x\colon A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto xa\end{aligned}$$

を考える．A を K 線型空間としてみたときの次元は有限であるから A の K 上の基底による T_x の表現行列が定義される．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{A/K}(x) &:= \det(T_x), \\ \mathrm{T}_{A/K}(x) &:= \mathrm{tr}(T_x)\end{aligned}$$

と定義する．これは基底のとり方によらない．

事実 5.4（有限次 Galois 拡大のトレースとノルム） L/K を Galois 拡大で $[L:K]=n$ とすると $\mathrm{Gal}(L/K)=\{\sigma_0,\dots,\sigma_{n-1}\}$ とおける．このとき $x\in L$ の L/K におけるノルム $\mathrm{N}_{L/K}(x)$ とトレース $\mathrm{T}_{L/K}(x)$ は

$$\mathrm{N}_{L/K}(x)=\prod_{k=0}^{n-1}\sigma_k(x),$$
$$\mathrm{T}_{L/K}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k(x)$$

と書くことができる．

定理 5.1（Hilbert の定理 90） L/K を有限次巡回拡大, σ をその Galois 群 $G=\mathrm{Gal}(L/K)$ の一つの生成元とする．このとき $x\in K$ について

1. $\mathrm{N}_{L/K}(x)=1\Longleftrightarrow$ ある $\alpha\in K^\times$ により $x=\sigma(\alpha)\cdot\alpha^{-1}$ と表される．
2. $\mathrm{T}_{L/K}(x)=0\Longleftrightarrow$ ある $\beta\in K^+$ により $x=\sigma(\beta)-\beta$ と表される．

証明 (1) ($\Leftarrow$) $x=\sigma(\alpha)\cdot\alpha^{-1}$ となる $\alpha\in K^\times$ が存在するとすると, ノルムは乗法的であり, L/K は Galois 拡大なので $\mathrm{N}_{L/K}(x)=\mathrm{N}_{L/K}(\sigma(\alpha))\,\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)^{-1}=\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)\,\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)^{-1}=1$ である．

($\Rightarrow$) $\mathrm{N}_{L/K}(x)=1$ とする．すると $\mathrm{N}_{L/K}(0)=0$ となるから $x\in K^\times$ である．L/K は巡回拡大なので $[L:K]=n$ とおくと σ が生成元であることより $G=\{1,\sigma,\sigma^2,\dots,\sigma^{n-1}\}$ と書ける．これから $K^\times$ への写像を

$$f\colon G\longrightarrow K^\times$$
$$\sigma^l\longmapsto f(\sigma^l):=\prod_{k=0}^{l-1}\sigma^k(x)$$

と定義する．これは,

$$\begin{aligned}f(\sigma^{l+n})&=\prod_{k=0}^{l+n-1}\sigma^k(x)=\left(\prod_{k=0}^{l-1}\sigma^k(x)\right)\left(\prod_{k=l}^{l+n-1}\sigma^k(x)\right)\\&=f(\sigma^l)\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sigma^k(x)\right)=\mathrm{N}_{L/K}(x)f(\sigma^l)=f(\sigma^l)\end{aligned}$$

などより well-defined な写像になっている．また, $f\in Z^1(G,K^\times)$ である．これを示すためには任意の $\sigma^l,\sigma^m\in G$ で $\sigma^l(f(\sigma^m))\cdot f(\sigma^l\sigma^m)^{-1}\cdot f(\sigma^l)=1$ となることを示せば良い．任意の $\sigma^l,\sigma^m\in G$ $(l,m\geq 0)$

をとる．このとき

$$
\begin{aligned}
f(\sigma^l\sigma^m) = f(\sigma^{l+m}) = \prod_{k=0}^{l+m-1}\sigma^k(x) &= \left(\prod_{k=0}^{l-1}\sigma^k(x)\right)\left(\prod_{k=l}^{l+m-1}\sigma^k(x)\right) \\
&= f(\sigma^l)\left(\prod_{k=0}^{m-1}\sigma^{l+k}(x)\right) = f(\sigma^l)\sigma^l(f(\sigma^m))
\end{aligned}
$$

となるので $f \in Z^1(G, K^\times)$ である．したがって命題 5.2 の 1 から $f \in B^1(G, K^\times)$ であるのである $\alpha \in K^\times$ が存在して $f(\sigma^l) = \sigma^l(\alpha) \cdot \alpha^{-1}$ となる．

(2)　($\Leftarrow$) $x = \sigma(\beta) - \beta$ となる $\beta \in K^+$ が存在するとすると，トレースは加法的であり，L/K は Galois 拡大なので $\mathrm{T}_{L/K}(x) = \mathrm{T}_{L/K}(\sigma(\beta)) - \mathrm{T}_{L/K}(\beta) = 0$ である．

($\Rightarrow$) $T_{L/K}(x) = 0$ とする．このとき (1) と同じように

$$
\begin{aligned}
g\colon G &\longrightarrow K^+ \\
\sigma^l &\longmapsto g(\sigma^l) := \sum_{k=0}^{l-1}\sigma^k(x)
\end{aligned}
$$

と定義するとこれも G から K への写像になっている．また，$g \in Z^1(G, K^+)$ であることがわかる．したがって命題 5.2 の 2 から $g \in B^1(G, K^+)$ であるのである $\beta \in K^+$ が存在して $g(\sigma^l) = \sigma^l(\beta) - \beta$ となる．　□

命題 5.2 は条件を Hilbert の定理 90 と揃えれば全く同じことを言っている．Hilbert の定理 90 を用いると例えば次の定理が示される．

定理 5.2（Kummer）　K を体とし，n を K の標数と互いに素な正整数とする．K が単位元 1 の原始 n 乗根をすべて含んでいるとするとき次が成り立つ．

1. L/K を n 次巡回拡大とするとき，ある $\alpha \in L$ が存在して，$L = K(\alpha)$ となる．ただし α はある $a \in K$ に対して $X^n - a$ の根になっている．
2. 逆に，$a \in K$ とし，α を $X^n - a$ のある根とすると，$L := K(\alpha)$ は K の d 次巡回拡大である．ただし d は n を割り切る正整数で α^d は K の元になる．

定理 5.3（Artin–Schreier）　K を標数 $p > 0$ の体とするとき次が成り立つ．

1. L/K を p 次巡回拡大とするとき，ある $\alpha \in L$ が存在して $L = K(\alpha)$ となる．ただし α はある $a \in K$ に対して $X^p - X - a$ の根になっている．
2. 逆に，$a \in K$ とし，α を $X^p - X - a \in K[X]$ のある根とすると $L := K(\alpha)$ は $X^p - X - a$ が $K[X]$ で既約なら K の p 次巡回拡大になり，そうでないならば $X^n - X - a$ は $K[X]$ で一次の積に分解されて $L = K$ となる．

これにより標数 0 の場合の巡回拡大，標数 $p > 0$ で p の倍数でない n による n 次巡回拡大，p 次巡回拡大の形がわかった．p の冪次拡大は Artin–Schreier–Witt 理論という Witt ベクトルを用いる理論により考えることができる．

参考文献

今回の発表は主に [1], [6] と 2018 年度の東工大での田口雄一郎教授による「代数学続論」という授業によっている. 最後の定理 5.2 と定理 5.3 の証明は [1] や [4] に載っている.

[1] 藤崎源二郎, 体と Galois 理論, 岩波書店, 1997.

[2] 河田敬義, ホモロジー代数, 岩波書店, 1990.

[3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics Algebra II, Chapters 4–7*, Springer-Verlag, 1990.

[4] S. Lang, *Algebra*, Springer, 2002.

[5] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[6] 村山光孝, 幾何学特論 C 第五回講義ノート. (2019 年 8 月 20 日アクセス)
`http://www.ocw.titech.ac.jp/index.php?module=General&action=T0300&GakubuCD=1&GakkaCD=311111&KeiCD=11&course=11&KougiCD=201603875&Nendo=2016&lang=JA&vid=05`

[7] 田口雄一郎, 代数学 III 講義ノート. (2019 年 8 月 20 日アクセス)
`http://www.math.titech.ac.jp/~taguchi/nihongo/15algIII-text160101.pdf`