局所化が体か離散付値環だが
ネーターでも整域でもない被約連結環

https://ryo1203.github.io

概要

局所化が体か離散付値環になっているが、ネーターでも整域でもない被約連結環を構成 (定理 2.1) し、この環によって (否定的に) 示される主張 (命題 3.1) をいくつかまとめた。反例は [Roh] で与えられたものであり、本稿は証明の詳細を加えたものである。前提知識として [AM] に記載されているレベルの環論を要求している。また、一部の証明 (命題 2.6) ではスキーム論 (とくにアファインスキーム) に関する事実を用いている。

目次

1 導入—簡単な例—

環といったら単位的可換環であるとする。

定義 1.1. 環 R について次の性質を定義する。

(a) R が**連結** (connected) であるとは、$R \cong R_1 \times R_2$ となる任意の環同型について $R_1 = 0$ または $R_2 = 0$ になることである。

(b) R が**被約** (reduced) であるとは、$a \in R$ について、ある正整数 n で $a^n = 0$ ならば $a = 0$ となることである。

(c) 局所環 R が**正則** (regular) であるとは、ネーター環であって、その唯一つの極大イデアル $\mathfrak{m}$ と剰余体 $k := R/\mathfrak{m}$ に対し、$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim R$ となることである。[*1] この局所環のことを**正則局所環** (regular local ring) と呼ぶ。

(d) (局所環とは限らない環)R が**正則** (regular ring) であるとは、ネーター環であって、R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ による局所化 $R_{\mathfrak{p}}$ が正則局所環になることである。

(e) R が**各点整域/ネーター/被約/正則** (pointwise integral/Noether/reduced/regular) であるとは、R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ による局所化 $R_{\mathfrak{p}}$ が整域/ネーター/被約/正則になることである。同様に各点〇〇としたら任意の素イデアルによる局所化が〇〇になることであるとする。

(f) R が**離散付値環** (discrete valuation ring) であるとは、Krull 次元 1 のネーター局所整閉整域であることである。

(g) R の **Krull 次元**とは、素イデアルの昇鎖の長さの上限のことであり、これを $\dim R$ と書く。

ここで、正則環の定義にはネーター環であることという条件が入っていることに注意する。(そもそも定理 2.1 の反例を自分が調べた理由はこのネーター性が必要なのか否かを知りたかったからである)

各点被約については次が成り立つ。

命題 1.2. 環 R について 各点被約 $\iff$ 被約 が成り立つ。

他の各点ネーター性や各点整域性についてはこのような同値性は一般には成り立たない。まずは次の反例を構成する。

定理 1.3. 次の主張に対する (被約ではない、もしくは連結ではない) 反例を与えることができる。

1. 各点整域 $\Longrightarrow$ 整域。
2. 各点ネーター $\Longrightarrow$ ネーター。
3. 各点 UFD $\Longrightarrow$ UFD。
4. 各点 PID $\Longrightarrow$ PID。
5. 各点整閉整域 $\Longrightarrow$ 整閉整域。
6. Krull 次元が有限 $\Longrightarrow$ ネーター [*2]

証明. (1),(3),(4),(5)　体は整域かつ UFD かつ PID かつ整閉整域であるが、体の直積は整域ではないので、とくに整域でも UFD でも PID でもない。よって体の有限個直積を考えれば良い。

(2)　[Vak] 3.6 Remark および [GW]Exercise 3.21 に記載されている J.Rabinoff による例を考えればいい。すなわち、代数閉体 k と互いに異なる k の元 $(a_i)_{i\in I}$ を取る。このとき

$$R \coloneqq k[U, T_1, T_2, \dots]/((U - a_i)T_{i+1} - T_i, T_i^2) \tag{1.1}$$

と定めるとこれが反例になる。実際、R の冪零元根基は有限生成でなく、とくに R はネーター環にならないが、任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R$ について局所化 $R_{\mathfrak{p}}$ はネーター環になることが計算によって確かめられる。

(6)　体 K を一つ固定して、無限変数多項式環 $K[X_1, X_2, \dots]$ を取る。そのイデアル $(X_1^2, X_2^3, \dots)$ による剰余環 $R \coloneqq K[X_1, X_2, \dots]/(X_1^2, X_2^3, \dots)$ を考えると、R は極大イデアル $(X_1, X_2, \dots)$ のみを素イデアルとして持つので $\dim R = 0 \leq 1$ である。一方、停留しないイデアルの昇鎖列 $(X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \dots$ が取れるため R はネーター環ではないのでこれが反例になる。 □

注意 1.4. 上記の定理 1.3 で与えた反例について、連結でないまたは被約ではない。定理 2.1 で与える反例は連結かつ被約であるため、ここで与えた (素朴な) 反例よりも厳しい条件が課されている。

条件を緩めて直ちに与えられる定理 2.1 に似た反例として次のようなものがある。

命題 1.5. 局所化が体である (連結ではない) ネーター被約環が存在する。

証明. 体の有限個直積を考えれば良い。 □

以上のことから、定理 2.1 の反例でもっとも難しい箇所は「整域ではないが被約連結である」という条件が課されていることであることがわかる。

2 反例構成

定理 2.1. 局所化が体か離散付値環だがネーターでも整域でもない被約連結環が存在する。

証明. 体 K を一つ固定し、$(E, \geq)$ を 2 つ以上の元を持つ gapfree[*3]な全順序集合とする (例えば $\mathbb{Q}$ がこれに相当する)。ここで、集合 $L \coloneqq E \times \mathbb{Z}^+$ の元 $(x, m), (y, n) \in L$ について積演算を

$$(x, m) \cdot (y, n) = \begin{cases} (x, m) & (x < y) \\ (y, n) & (y < x) \\ (x, n + m) & (x = y) \end{cases} \tag{2.1}$$

と定める。この積は可換かつ結合的であり、単位元 1 を添加した $M \coloneqq L \cup \{1\}$ を考えると M は乗法モノイドになる。M によって形式的に構成できる K 代数 $K[M]$ を A とする。すなわち、M の元を $\{e_\alpha \mid \alpha \in M\}$ と表し、$e_\alpha \cdot e_\beta = e_{\alpha \cdot \beta}$ によって自然に定義される積を入れた、K 上の代数である。とくに A の単位元は e_1 である単位的可換環になっている。命題 2.2(整域ではない)、命題 2.3(被約である)、命題 2.4(連結である)、命題 2.5(局所化について)、命題 2.6(ネーターではない) によってこの A は求めるものであることが示される。 □

以下では定理 2.1 の証明で用いた記号をそのまま用いる。

命題 2.2. 環 A は整域ではない。

証明. E は 2 つ以上の元を持つので $x, y \in E$ で $x < y$ となるものが取れる。このとき A において $e_{(x,1)} \cdot (1 - e_{(y,1)}) = e_{(x,1)} - e_{(x,1)\cdot(y,1)} = e_{(x,1)} - e_{(x,1)} = 0$ であるが、$e_{(x,1)} \neq 0$ かつ $e_{(y,1)} \neq e_1 = 1$ であるので、A は零因子を含む。ゆえに整域ではない。 □

命題 2.3. 環 A は被約である。

証明. $r \in A \setminus K$ を任意に取ると、$r \notin K = Ke_1$ より、ある有限集合 $L' \subset L$ と $r_1 \in K$ と $\alpha \in L'$ に対して $r_\alpha \in K^\times$ が存在して

$$r = r_1 e_1 + \sum_{\alpha \in L'} r_\alpha e_\alpha \tag{2.2}$$

[*3] gapfree であるとは、任意の $x, y \in E$ が $x < y$ を満たすとき、ある $z \in E$ で $x < z < y$ となるものが存在すること。この性質より、2 つ以上の元を持つならば無限集合になる。例えば有理数体 $\mathbb{Q}$ である。

となる。L に辞書式順序を入れると全順序だからある最大元 $(z,l) \in L$ が取れる。すなわち、$l \coloneqq \max\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid \exists x \in E, (x,m) \in L'\}$ かつ $z \coloneqq \max\{x \in E \mid (x,l) \in L'\}$ である。このとき、最大性から r は $r_{(z,l)} \cdot e_{(z,l)}$ の項を持ち、これより辞書式順序で大きい項を持たない。r^2 は $(r_{(z,l)})^2 \cdot e_{(z,l)}^2 = r_{(z,l)}^2 \cdot e_{(z,l)\cdot(z,l)} = r_{(z,l)}^2 \cdot e_{(z,2l)}$ となる。r の $r_{(z,l)}e_{(z,l)}$ 以外の元 (x,n) は $n < l$ または $x < z$ であるから、辞書式順序で $(x,n) \cdot (y,m) \leq (\max\{x,y\}, n+m)$ となる。$n+m < 2l$ または $\max\{x,y\} < z$ より $e_{(z,2l)}$ の項はこの一つだけである。よって $e_{(z,2l)} \neq e_{(z,l)}$ と合わせて $r^2 \neq r$ である。さらに $r_{(z,l)}^2 \neq 0$ から $r \in A \setminus K$ ならば $r^2 \neq 0$ になる。K が体なので被約であることと合わせて、$r \in A$ が $r \neq 0$ ならば $r^2 \neq 0$ が成り立つ。故に $r^2 = 0$ ならば $r = 0$ となる。これを用いて被約であることを示す。$r \in A$ が $r^n = 0$ となったとする。このとき十分大きい $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を取るとある正整数 m が $n + m = 2^a$ となるように取ることができる。このとき $0 = r^n = r^{n+m} = r^{2^a}$ から上で示したことを繰り返し用いて $r = 0$ となる。よって A は被約である。 □

命題 2.4. 環 A は連結である。

証明. 命題 2.3 の証明より、$r \in A \setminus K$ について $r \neq r^2$ となる。K についても 0 と 1 以外の元で同様の結果になるため、A の冪等元は 0 と 1 のみである。ここで、環同型 $\varphi\colon A \to A_1 \times A_2$ を任意に取ると、ある $a, b \in A$ によって $\varphi(a) = (1,0)$ かつ $\varphi(b) = (0,1)$ となるものが取れる。特に $(1,0)^2 = (1,0)$ かつ $(0,1)^2 = (0,1)$ で冪等元なので、a と b も A で冪等元なので、$a, b \in \{0,1\}$ となる。さらに、環同型であるから、$\varphi(1) = (1,1)$ であり、$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = (1,1) = \varphi(1)$ から単射性より $a + b = 1$ となる。よって、$a = 0$ かつ $b = 1$ であるか、$a = 1$ かつ $b = 0$ のいずれかになる。$b = 1$ のとき $(1,1) = \varphi(1) = \varphi(b) = (0,1)$ であり、$a = 1$ のとき $(1,1) = \varphi(1) = \varphi(a) = (1,0)$ より、A_1 または A_2 において $1 = 0$ が必ず成り立つ。よって A は連結である。 □

命題 2.5. 環 A の任意の素イデアルによる局所化は体か離散付値環である。とくに、体であるならば K と同型であり、離散付値環であるならば一変数多項式環 $K[X]$ の局所化である。

証明. 素イデアルによる局所化が体 K または一変数関数体 $K(X)$ の中の局所環 (一つは $K[X]_{(X)}$) のいずれかに同型になることを示す。

任意に素イデアル $\mathfrak{p}$ を取る。E の部分集合 I と J を

$$
\begin{aligned}
I &\coloneqq \{x \in E \mid e_{(x,1)} \in \mathfrak{p}\}, \\
J &\coloneqq \{x \in E \mid e_{(x,1)} \notin \mathfrak{p}\}
\end{aligned}
$$

と定める。これは E の分割になっており、任意の $x \in I$ と $y \in J$ について $x < y$ となっている。実際、$y < x$ となったとすると、$e_{(x,1)} \in \mathfrak{p}$ と $e_{(x,1)} \cdot e_{(y,1)} = e_{(y,1)}$ より、$\mathfrak{p} \ni e_{(x,1)} \cdot e_{(y,1)} = e_{(y,1)} \notin \mathfrak{p}$ となるので矛盾。$I \cap J = \emptyset$ から $x \neq y$ となるから $x < y$ となることがわかる。E が gapfree だったので、「I は最大元を持たない、または J は最大元を持たない」ことがわかる。

$\eta\colon A \to A_{\mathfrak{p}}$ を局所化の射とする。$x \in J$ が最小元でないものとすると、ある $y \in J$ で $y < x$ であるから、$e_{(y,1)} \cdot (1 - e_{(x,1)}) = 0 \in A$ かつ $e_{(y,1)} \in A \setminus \mathfrak{p}$ より $\eta(e_{(x,1)}) = \eta(1_A) = 1_{A_{\mathfrak{p}}}$ となる。今度は $x \in I$ が最大元でないとすると、ある $y \in I$ で $x < y$ であるから、$(1 - e_{(y,1)}) \cdot e_{(x,1)} = 0 \in A$ かつ $e_{(y,1)} \in \mathfrak{p}$ より

$1-e_{(y,1)} \notin \mathfrak{p}$ なので $\eta(e_{(x,1)}) = \eta(0_A) = 0_{A_\mathfrak{p}}$ となる。以上より、J の最小元でも I の最大元でもない $x \in E$ を第一成分に持つ L の元 (x,n) について $e_{(x,n)} = (e_{(x,1)})^n$ から $A_\mathfrak{p}$ において

$$\eta(e_{(x,n)}) = \begin{cases} 1 & (x \in J) \\ 0 & (x \in I) \end{cases} \tag{2.3}$$

となる。$r \in A$ について有限集合 $L' \subset I$ と $L'' \subset J$ が取れて

$$r = \left(\sum_{x \in L'} \sum_{i=1}^{N_x} r_{(x,n_{x,i})} e_{(x,n_{x,i})} \right) + \left(r_1 e_1 + \sum_{y \in L''} \sum_{j=1}^{N_y} r_{(y,m_{y,j})} e_{(y,m_{y,j})} \right) \tag{2.4}$$

と書ける。以下のそれぞれの場合について示す。

1. I が最大元を持たず、J が最小元を持たない。
2. I が最大元を持つ (したがって J は最小元を持たない)。
3. J が最小元を持つ (したがって I は最大元を持たない)。

ここで $r_{(x,n_{x,i})}$ と $r_{(y,m_{y,j})}$ と r_1 は $0 \in K$ であっても良いこととして、以上の (2) と (3) においてそれぞれ L' が I の最大元を含み、L'' が J の最小元を含むものとする。

(1)　$r \in A$ を取ると (2.3) によって $\eta(r) \in A_\mathfrak{p}$ は K の元の和になるので任意の $r \in A \setminus \mathfrak{p}$ についても $1/r = \eta(r)^{-1} \in A_\mathfrak{p}$ より $1/r$ も K の元になるから $A_\mathfrak{p} = K$ となる。

(2)　I の最大元を z とすると (2.3) から任意の $e_{(x,n)}$ について

$$\eta(e_{(x,n)}) = \begin{cases} 1 & (x \in J) \\ 0 & (x \in I \setminus \{z\}) \\ (e_{(z,1)})^n & (x = z) \end{cases} \tag{2.5}$$

となる。したがって、(2.4) と表示して $\eta(r) \in A_\mathfrak{p}$ を考えると (2.5) より

$$\eta(r) = \left(\sum_{i=1}^{N_z} r_{(z,n_{z,i})} (e_{(z,1)})^{n_{z,i}} \right) + \left(r_1 + \sum_{y \in L''} \sum_{j=1}^{N_y} r_{(y,m_{y,j})} \right) \tag{2.6}$$

よって、ある K 係数の多項式 $f(X) \in K[X]$ によって $\eta(r) = f(e_{(z,1)})$ となる。$e_{(z,1)}$ は形式的な元だから多項式環の不定元とみなせることに注意する。すなわち、$\eta(A) \subset A_\mathfrak{p} \subset K(e_{(z,1)})$ と考えれば $\eta(A) = K[e_{(z,1)}]$ という多項式環との等号が与えられる。ゆえに $A_\mathfrak{p}$ はその局所化であるのでとくに一変数多項式環 $K[X]$ の局所環に同型になるので特に離散付値環になる。更に詳しく、$A_\mathfrak{p} \cong K[X]_{(X)}$ となることを示す。もし $\eta(r) \notin (e_{(z,1)}) \subset A_\mathfrak{p}$ となったとすると $f(X)$ が定数項を持ち、その定数項は L の定義から $n_{x,i} \neq 0$ から (2.6) の右辺第二項に対応し、少なくとも、$L'' \neq \emptyset$ もしくは、$L'' = \emptyset$ かつ $r_1 \neq 0$ ということなのでいずれにしても $r \notin \mathfrak{p}$ となる。逆に $r \in A \setminus \mathfrak{p}$ について $\eta(r) \notin (e_{(z,1)}) \subset K[e_{(z,1)}]$ となることを示す。J は最小元を持たないから L'' の任意の元より小さい元 w が取れる。このとき任意の $x \in L' \subset I$ について $w \in J$ より $e_{(w,1)} \cdot e_{(x,n_{x,i})} = e_{(x,n_{x,i})}$ である。任意の $y \in L'' \subset J$ については $w < y$ から $e_{(w,1)} \cdot e_{(y,m_{y,j})} = e_{(w,1)}$ より

$$e_{(w,1)} \cdot r = \left(\sum_{x \in L'} \sum_{i=1}^{N_x} r_{(x,n_{x,i})} e_{(x,n_{x,i})} \right) + \left(r_1 + \sum_{y \in L''} \sum_{j=1}^{N_y} r_{(y,m_{y,j})} \right) e_{(w,1)} \tag{2.7}$$

となる。ここで、$r, e_{(w,1)} \notin \mathfrak{p}$ なのでその積も $\mathfrak{p}$ に含まれない。故に $e_{(w,1)} \cdot r \notin \mathfrak{p}$ であるが、(2.7) の右辺第一項は $\mathfrak{p}$ に含まれるため、右辺第二項の $e_{(w,1)}$ の係数が 0 になってはならない。したがって、$r \in A \setminus \mathfrak{p}$ について (2.6) の右辺第二項は 0 ではない。これは $\eta(r)$ が $e_{(z,1)}$ の多項式として定数項を持つということなので $\eta(r) \notin (e_{(z,1)}) \subset A_{\mathfrak{p}}$ である。以上より $A_{\mathfrak{p}}$ の元の分子は多項式 $K[e_{(z,1)}]$ の元であり、分母は $K[e_{(z,1)}] \setminus (e_{(z,1)})$ の元になるので $A_{\mathfrak{p}}$ は一変数関数体 $K(e_{(z,1)})$ の中の局所環であり、とくに $K[X]_{(X)}$ と同型になる。

(3)　J の最小元を z とすると (2.3) から任意の $e_{(x,n)}$ について

$$\eta(e_{(x,n)}) = \begin{cases} 1 & (x \in J \setminus \{z\}) \\ 0 & (x \in I) \\ (e_{(z,1)})^n & (x = z) \end{cases} \tag{2.8}$$

となる。したがって、(2.4) と表示して $\eta(r) \in A_{\mathfrak{p}}$ を考えると (2.8) より

$$\eta(r) = \left(\sum_{i=1}^{N_z} r_{(z,n_{z,i})} (e_{(z,1)})^{n_{z,i}} \right) + \left(r_1 + \sum_{y \in L'' \setminus \{z\}} \sum_{j=1}^{N_y} r_{(y,m_{y,j})} \right) \tag{2.9}$$

となるから (2) と同様に $\eta(r)$ は K 係数多項式 $f(X) \in K[X]$ によって $\eta(r) = f(e_{(z,1)})$ と書ける。よって、$K[e_{(z,1)}] = \eta(A) \subset A_{\mathfrak{p}} \subset K(e_{(z,1)})$ とみなせるので (2) と同様に $A_{\mathfrak{p}}$ は多項式環 $\eta(A) = K[e_{(z,1)}]$ のある素イデアルに依る局所化であるから体 $K(X)$ か離散付値環になる。 □

命題 2.6. 環 A はネーターではない。

証明. スキーム論に関する初等的な事実を用いる。[GW] を参考にする。$X = \mathrm{Spec}(A)$ を A から定まるアファインスキームとする。もし A がネーター環であったとすると X はネータースキームであるから、[GW]Exercise 3.15 より X の既約成分全体の集合は局所有限である。[*4] また、[GW]Exercise 3.16(a) と X の既約成分の局所有限性から以下は同値。

(i) X の連結成分は既約である。
(ii) 任意の $\mathfrak{p} \in X = \mathrm{Spec}(A)$ について局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ の冪零元根基は素イデアルになる。

ここで、命題 2.5 から $A_{\mathfrak{p}}$ が整域なので上記の条件 (ii) が満たされている。ゆえに同値性から X の連結成分は既約である。ここで A は命題 2.4 から A は連結環なので X は連結空間であることがわかるから X 自身が X の連結成分である。ゆえに X は既約スキームである。X は既約スキームかつ各点整域であるので X は整スキームである。したがって [GW]Proposition 3.27(2) から大域切断 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) = A$ は整域であるが、これは命題 2.2 に矛盾する。よって A はネーター環ではない。 □

3　反例により得られる帰結

定理 2.1 で構成した環によって定理 1.3 よりも厳しい条件 (被約かつ連結) を課しても次の命題が示される。

[*4] すなわち、X の任意の点 x に対してある開近傍 U で高々有限個の既約成分と共通部分を持つようなものが存在する。

命題 3.1. 一般に次の性質は被約連結環であることを課したとしても成り立たない。

1. 各点整域 $\Longrightarrow$ 整域。
2. 各点ネーター $\Longrightarrow$ ネーター。
3. 各点 UFD $\Longrightarrow$ UFD。
4. 各点 PID $\Longrightarrow$ PID。
5. 各点整閉整域 $\Longrightarrow$ 整閉整域。
6. Krull 次元が有限 $\Longrightarrow$ ネーター [*5]
7. 各点正則 $\Longrightarrow$ 正則環。
8. Krull 次元が 1 以下かつ各点ネーター $\Longrightarrow$ ネーター

証明. (1),(2) は定理 2.1 より従う。(3),(4),(5),(7) は命題 2.5 より、任意の素イデアルによる局所化は体か離散付値環であり、体と離散付値環は正則局所環かつ UFD かつ PID かつ整閉整域である。しかし、構成した A はネーター環ではないため正則環ではなく、整域でもないため UFD でも PID でも整閉整域でもない。(6) については Krull 次元の定義から $\dim A = \sup\{\dim A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\}$ となっていて、体の Krull 次元は 0 で離散付値環の Krull 次元は 1 なので命題 2.5 から $\dim A \leq 1$ となるが、命題 2.6 より A はネーター環ではない。(8) は環 A が同時に (2) と (6) の反例になっていることから従う。 $\square$

定理 2.1 で構成した反例の嬉しい点を少し述べる。定理 1.3 では (1) から (6) までの反例を与えたが、それらは被約ではないまたは連結ではないものであった。しかしながら定理 2.1 によって被約かつ連結であることを課しても (1) から (6) は成り立たないことがわかった (とくに、各点整域だが整域ではない例として、素朴に与えられる体の直積以外の反例を手に入れることができている)。さらに A はその局所化がわかりやすい形をしているため、各点正則であることの判定がしやすい。さらに、同時に (2) と (6) の反例になっていることから、(8) にも反例を与えることが出来た。

参考文献

参考文献は以下の通りである。[GW] は最近 second edition が発売されたが、本稿で参考にしているのは first edition であることに注意されたい。本稿の大部分は [Roh] に依るものである。[Roh] にはさらにスキームの既約性などについて細かい議論が述べられている。

[Roh] F. Rohrer, “Irreducibility and integrity of schemes,” Expositiones Mathematicae, vol. 33, no. 4, pp. 550 – 558, 2015, doi: 10.1016/j.exmath.2014.12.008.

[GW] U. Görtz and T. Wedhorn, Algebraic Geometry I: Schemes with examples and exercises, 1st edition. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010.

[Vak] R. Vakil, “FOUNDATIONS OF ALGEBRAIC GEOMETRY CLASSES 9 AND 10”, [Online]. Available: https://math.stanford.edu/~vakil/0708-216/216class0910.pdf

[AM] M. F. Atiyah and G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1994.

[*5] [AM]Exercise 11.4 に記載されている永田による反例によって ネーター環 $\Longrightarrow$ Krull 次元が有限 も成り立たないことが知られている。