

Séminaire de Géométrie Algébrique du Bols-Marie SGA 4.5

Cohomologie étale : les points de départ

rédigé par J.F. Boutot の和訳

<https://ryo1203.github.io>

2021年8月29日

概要

SGA4.5の一章 Cohomologie étale : les points de départ(SGA4.5 arcata) を和訳した。動機は一度こういうものを読んでみたかったこと、エタールコホモロジーを勉強する上で参照していた文献においてこれが推されていたこと、比較的短いこと、原文がタイプライタ形式であり検索しても以前はあったようだが英語版すら LaTeX 打ちされていないなど。日本語で打っているのはフランス語を訳すときに一度英語を経由するが、英語で書こうとすると結局翻訳ソフトのコピペになってしまうと思ったから。原文が EGA や SGA が公式に公開されている <http://library.msri.org/books/sga/sga/index.html> で閲覧できるためこの和訳も公開しても良いと判断したが、問題が生じるならすぐに取り下げる。和訳は主に DeepL で単語を調べつつわからないときはその部分をまるごと英訳してもらってそれを日本語に解釈し直している。他にはたまに数学仏和辞典を使用。アブストラクトと注意や footnote 以外が和訳の部分になる。

2021/1/14 (I.6.5) まで、2021/1/15 (II.4.5) まで、2021/1/16 (III.3.4) まで

本稿は6つの章からなる、P.Deligneが1974年のArcata(AMS Summer School on algebraic geometry)で”Inputs of étale cohomology”というタイトルで公演したもののレジュメである。7^e章は同じ会における”rapport sur la formule des traces”の内容である。本稿では、SGA4におけるセンスのないギャグを取り除きエタールコホモロジー論の基本的な定理の証明をすることを目的とした。定理を完全に一般的な形で述べることも、証明をする上では必要な devissage についても、そのほうがよいと思しなかった。一方で、”既約性”については devissage を行うためには扱わなければならない、これについては強調した。

本稿は原典ではないものの、3冊のSGA4を読む者の手助けとなることを望む。

注意 0.1. 以下、準コンパクト (アフィン開集合の有限の和集合で表される) かつ準分離的 (2つのアフィン開集合の共通部分は準コンパクトになる) であるようなスキームを考え、これを単にスキームと言うこととする。

目次

1	Topologies de Grothendieck	2
1.1	Crible	2
1.2	Faisceaux	3
1.3	Champs	3

1.4	Descente fidelement plate	5
1.5	Un cas particulier: le theoreme 90 de Hilbert	7
1.6	Topologies de Grothendieck	8
2	Topologie etale	10
2.1	Topologie etale	10
2.2	Exemples de faisceaux	11
2.3	Fibres, images directes	13
2.4	Cohomologie galoisienne	15
3	Cohomologie des courbes	17
3.1	Le groupe de Brauer	17
3.2	Le theoreme de Tsen	19
3.3	Cohomologie des courbes lisses	20
3.4	Devissages	23
4	Theoreme de changement de base par un morphisme propre	24
4.1	Intrduction	24
4.2	Demonstration pour $q = 0$ ou 1 et $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	25
4.3	Faisceaux constructibles	26

1 Topologies de Grothendieck

もともと、グロタンディーク位相の概念はグロタンディークによる降下定理が下地になっており、コホモロジー論が使われるようになるのは更に後のことである。その流れと同様に、次の通りにこの章を進める。古典的な局所性の概念を捉え直し、局所的性質と貼り合わせについてを 1.1 1.2 1.3 で述べ、グロタンディーク位相についての一般的な概念を 1.6 で述べる。また、グロタンディーク位相の代数幾何学への導入を正当化するために、1.4 において忠実平坦降下定理を証明し、1.5 においては古典的なヒルベルトの定理 90 の一般化を行う。

より詳しく完備だが、簡潔な文献として、Giraud による著書がある。M.Artin によるノート”Grothendieck topologies”の I 章から III 章は未だに良い文献である。866 ページある SGA4 の I 章から VI 章はクリスタルコホモロジーを使う出てくるエキゾチック位相を考えると役に立つが、エタール位相を使う場合は、これが古典的な直感と近いので、SGA4 はなくてはならないというわけではない。

1.1 Crible

X を位相空間、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を実数値関数とする。 f の連続性は**自然な局所性** (nature locale) を持つ。すなわち、もし f が十分小さい X の開集合の上でそれぞれ連続であれば、 f は X 全体で連続である。自然な局所性を形式的に定義するために、いくつかの定義から始める。

X の開集合系 \mathcal{U} が**篩** (crible) であるとは、任意の $U \in \mathcal{U}$ と開集合 $V \subset U$ について、 $V \in \mathcal{U}$ となることをいう。篩が**被覆** (couvrant) であるとは、篩に含まれている開集合の和集合が X 自身と一致することをいう。

X の開集合系 $\{U_i\}$ が与えられたとき、 $\{U_i\}$ から生成される篩とは、定義から、 X の開集合 U であって、

ある U_i が U を含むようなものすべての集合のことである。

X の開集合 U に定義される性質 $P(U)$ が局所的 (locale) であるとは、 X の任意の開集合 U とその任意の被覆篩 \mathcal{U} について、 $P(U)$ が成り立つことと、任意の $V \in \mathcal{U}$ について $P(V)$ が成り立つことが同値であるときのことをいう。例えば、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ について、「 f が U において連続である」ことは局所的性質である。

1.2 Faisceaux

X 上、局所的に与えられた関数の概念を精密化する。

1.2.1 篩の観点から

\mathcal{U} を X の篩とする。 X 上、 \mathcal{U} -局所的に与えられる関数とは、 $U \in \mathcal{U}$ とその上の関数 f_U であって、 $V \subset U$ となる $V \in \mathcal{U}$ について $f_V = f_U|_V$ となる組のことである。

1.2.2 Čech の観点から

\mathcal{U} を $\{U_i\}$ から生成される篩とする。関数が \mathcal{U} -局所的に与えられることは、 U_i とその上の関数 f_i であって、 $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たす組が与えられることと等しい。

言い換えると、 $Z = \coprod U_i$ とするとき、関数が \mathcal{U} -局所的に与えられることは、 Z 上の自然な射影 $Z \rightarrow X$ の任意の点におけるファイバーの上で、定数となる Z 上の関数が与えられることと等しい。^{*1}

1.2.3 連続関数の層

連続関数は層を成す。すなわち、開集合 V とその任意の被覆篩 \mathcal{U} について、 \mathcal{U} -局所的な関数 $\{f_U\}$ であって、 f_U が $U \in \mathcal{U}$ 上連続であるものとする。このとき、ただ一つの V 上の連続関数であって、任意の $U \in \mathcal{U}$ において $f|_U = f_U$ であるようなものが存在する。

1.3 Champs

ベクトル束が X 上局所的に与えられることを精密化する。

1.3.1 篩の観点から

\mathcal{U} を X の篩とする。ベクトル束が X 上で \mathcal{U} -局所的に与えられているとは、次の条件を満たす組が与えられることである。

- (a) 任意の $U \in \mathcal{U}$ についてベクトル束 E_U が与えられている。
- (b) $V \subset U$ となる開集合について、同型写像 $\rho_{U,V}: E_V \rightarrow E_U|_V$ がある。
- (c) $W \subset V \subset U$ となる開集合について、以下の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc}
 E_W & \xrightarrow{\rho_{U,W}} & E_U|_W \\
 \searrow \rho_{V,W} & & \nearrow \rho_{U,V}|_W \\
 & E_V|_W &
 \end{array}$$

^{*1} 共通部分上で同じ値を取る必要があり、それをファイバー上で定数という形で表現している。

すなわち、 $\rho_{U,w} = \rho_{U,V}|_W \circ \rho_{V,W}$ となる。

1.3.2 Čech の観点から

\mathcal{U} を $\{U_i\}$ から生成される篩とする。ベクトル束が \mathcal{U} -局所的に与えられることは、以下の条件を満たす組が与えられることである。

- (a) U_i それぞれについてベクトル束 E_i が与えられている。
- (b) $U_{ij} := U_i \cap U_j = U_i \times_X U_j$ とおくと、同型写像 $\rho_{ji}: E_i|_{U_{ij}} \rightarrow E_j|_{U_{ij}}$ がある。
- (c) $U_{ijk} := U_i \times_X U_j \times_X U_k$ とおくと、以下の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc}
 E_i|_{U_{ijk}} & \xrightarrow{\rho_{ki}|_{U_{ijk}}} & E_k|_{U_{ijk}} \\
 & \searrow \rho_{ji}|_{U_{ijk}} & \nearrow \rho_{kj}|_{U_{ijk}} \\
 & E_j|_{U_{ijk}} &
 \end{array}$$

すなわち、 U_{ijk} 上で $\rho_{ki} = \rho_{kj} \circ \rho_{ji}$ となる。

言い換えると次のようになる。 $Z = \coprod U_i$ とし、 $\pi: Z \rightarrow X$ を自然な射影とする。ベクトル束が \mathcal{U} -局所的に与えられることは、以下の条件を満たす組が与えられることと等しい。

- (a) Z 上のベクトル束が与えられる。
- (b) Z の点 x と y が $\pi(x) = \pi(y)$ を満たすとき、ベクトル束 E の x と y におけるファイバー E_x と E_y について同型写像 $\rho_{yx}: E_x \rightarrow E_y$ があり、これは (x, y) に依存する。
- (c) Z の点 x, y と z が $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z)$ であるとき、 $\rho_{zx} = \rho_{zy} \circ \rho_{yz}$ を満たす。

1.3.3 \mathcal{U} -局所的なベクトル束

X 上のベクトル束 E は \mathcal{U} -局所的なベクトル束 $E_{\mathcal{U}}$ を定める。すなわち、任意の $U \in \mathcal{U}$ について E_U を E の制限とする。ベクトル束が自然な局所性を持つことは次のように述べることができる。すなわち、 X の任意の被覆篩 \mathcal{U} について、関手 $E \mapsto E_{\mathcal{U}}$ は X 上のベクトル束から \mathcal{U} -局所的なベクトル束を与え、これは圏同値を与える。

1.3.4 partie

もし、「 X の開集合」を「 X の部分集合」と置き換えると、 X の部分空間の篩という概念を得る。この置き換えによって、以上の定理を書き換えることができる。例えば、 X を正規空間、 \mathcal{C} を X の有限集合である局所閉集合全体から生成される X の部分空間による篩とする。すると、関手 $E \mapsto E_{\mathcal{C}}$ は X のベクトル束に対し、 \mathcal{C} -局所的なベクトル束を与え、圏同値を与える。

代数幾何学において、「 X 上の空間による篩」を考えると有用である。次の節でこのことについて見る。

1.4 Descente fidelement plate

1.4.1 Zariski topology

スキームを考える上で、ザリスキー位相は線形でない問題を考える上で十分良いものであるとは言えないため、我々は、以前の定義に出てきた開埋め込みをより一般の射に置き換える。この点について、下降させる技術は局所化の技術として現れる。それゆえ、以下の下降に関する主張は、考えている性質が忠実平坦位相において自然な局所性を持つことを言うことで表現することができる。[ここで、スキームの射が忠実平坦であるとは、それが全射かつ平坦であることとする]

1.4.2 忠実平坦性

命題 1.1. A を環、 B を忠実平坦な A 代数とする。このとき次が成り立つ。

- (1) A 加群の列 $\Sigma = (M' \rightarrow M \rightarrow M'')$ が完全であることと、 B による係数拡大の列 $\Sigma_{(B)}$ は完全列になることは同値。
- (2) A 加群 M が有限生成であることと、係数拡大した B 加群 $M_{(B)}$ が有限生成であることは同値である。これは有限表示性、平坦性、有限階数局所自由性、可逆性 (つまり階数 1 の局所自由性) すべてについても同様のことが言える。

証明. (i) B の平坦性から関手 $M \mapsto M_{(B)}$ は完全であるから、 A 加群 N が 0 でないとき、 $N_{(B)}$ も 0 にならないことを示せば良い。もし N が 0 でないとすると、 N は一元生成の部分加群 A/\mathfrak{a} を含む。よって $N_{(B)}$ は一元生成の部分加群 ${}^*2 (A/\mathfrak{a})_{(B)} = B/\mathfrak{a}B$ を含む。これは環のスペクトラムの射 $\varphi: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ の全射性より 0 ではない。[もし $V(\mathfrak{a})$ が空集合でなければ、 $\varphi^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}B)$ も空でないから]

(ii) 任意に $M_{(B)}$ の元の集合 (x_i) *3 を取る。このとき M の有限生成部分加群 M' であって、 $M'_{(B)}$ が x_i たちを含むようなものが存在する。もし $M_{(B)}$ が有限生成であり、 x_i たちをその生成系として取ったとすると、 $M'_{(B)} = M_{(B)}$ となるから ${}^*4 M' = M$ より M は有限生成になる。

もし $M_{(B)}$ が有限表示であるとき、上述したように全射 $A^n \rightarrow M$ が取れる。 N をその全射の核とすると、 B 加群 $N_{(B)}$ は *5 有限生成であるので、 N も有限生成になる。したがって M は有限表示である。

”平坦性”に関する議論は (i) からすぐに帰結される。また、”有限階数局所自由性”は”平坦かつ有限表示”を意味し、また、階数は体へスカラー拡大することで確認することができる。□

1.4.3 Crible

X をスキーム、 S を X 上のファイバー積について閉じている ${}^*6 X$ -スキームのクラスとする。クラス $\mathcal{U} \subset S$ が X 上、(S において相対的に) 篩 (crible) であるとは、 $U, V \in S$ と $U \in \mathcal{U}$ と任意の X -スキームの射 $\varphi: V \rightarrow U$ があるとき、 $V \in \mathcal{U}$ となることをいう。 S における X -スキームの族 $\{U_i\}$ から生成される篩とは、 $V \in S$ であって、ある U_i と、ある X -スキームの射 $V \rightarrow U_i$ があるものすべての族のことをいう。

*2 B はとくに A 上平坦なので単射性が保たれている

*3 有限個であるという仮定が必要

*4 完全性より

*5 有限表示性から

*6 ファイバー積で閉じていることは、開集合からなる圏が共通部分で閉じていることの類似である

1.4.4 \mathcal{U} -局所的な準連接層

\mathcal{U} を X の篩とする。 X 上 \mathcal{U} -局所的に準連接層が与えられるとは、次の条件を満たす組が与えられることである。

- (a) 任意の $U \in \mathcal{U}$ について準連接層 E_U が与えられている。
- (b) 任意の $U \in \mathcal{U}$ と S における任意の X -スキームの射 $\varphi: V \rightarrow U$ について、同型射 $\rho_\varphi: E_V \rightarrow \varphi^* E_U$ が存在する。そして次を満たす。
- (c) S における X -スキームの射 $\psi: W \rightarrow V$ について以下の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} E_W & \xrightarrow{\rho_{\varphi \circ \psi}} & \psi^* \varphi^* E_U \\ & \searrow \rho_\psi & \nearrow \psi^* \rho_\varphi \\ & \psi^* E_V & \end{array}$$

すなわち、 $\rho_{\varphi \circ \psi} = \psi^*(\rho_\varphi) \circ \rho_\psi$ が成り立つ。

E を X 上の準連接層とする。任意の $U \in \mathcal{U}$ についてその構造射 $\varphi_U: U \rightarrow X$ をとり、 $\varphi_U^* E$ をとる。さらに、任意の射 $\psi: V \rightarrow U$ について、同型射 ρ_ψ を標準的な同型射

$$E_V := (\varphi_U \circ \psi)^* E \longrightarrow \psi^* \varphi_U^* E = \psi^* E_U$$

とする。これらによって定まる \mathcal{U} -局所的な準連接層を $E_{\mathcal{U}}$ と書く。

1.4.5 fpqc 降下

定理 1.2. $\{U_i\} \subset S$ を X 上平坦な X -スキームの有限集合であって、 X が各 U_i の像によって被覆されるものとする。また、 \mathcal{U} をこれから生成される篩とする。このとき、関手 $E \mapsto E_{\mathcal{U}}$ は X 上の準連接層の圏と \mathcal{U} -局所的な準連接層の圏の間の圏同値を与える。

証明. 我々は X がアフィンであり \mathcal{U} が X 上忠実平坦なアフィン X -スキーム U^{*7} によって生成された篩の場合のみを扱う。この状況への帰着は形式的なものである。 $X = \text{Spec}(A)$ とし、 $U = \text{Spec}(B)$ とする。

もし、射 $U \rightarrow X$ が切断を持てば、 X は篩 \mathcal{U} に含まれて、定理の主張は明らかなるものとなる。

\mathcal{U} -局所的に与えられた準連接加群はそれぞれ U 、 $U \times_X U$ 、 $U \times_X U \times_X U$ 上の加群 M' 、 M'' 、 M''' を定義する。また、 p はこの三つの空間の間の任意の射影^{*8}とすると、同型射 $\rho: p^* M^\bullet \rightarrow M^\bullet$ も定まる。これは

$$\begin{array}{ccccc} & \longleftarrow & & \longleftarrow & \\ U_*: U & & U \times_X U & \longleftarrow & U \times_X U \times_X U \\ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \end{array}$$

の上のカルテジアン図式

$$\begin{array}{ccccc} & \longleftarrow & & \longleftarrow & \\ M^*: M' & & M'' & \longleftarrow & M''' \\ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \end{array}$$

*7 唯一つから生成する

*8 例えば $p: U \times_X U \rightarrow U$ など

である。

逆に M^* は \mathcal{U} -局所的に与えられた加群を定義する。 $V \in \mathcal{U}$ について、ある射 $\varphi: V \rightarrow U$ が存在して $M_U := \varphi^* M'$ とおく。すると、 $\varphi_1: V \rightarrow U$ と $\varphi_2: V \rightarrow U$ に対して、自然な同一視 $\varphi_1^* M' \cong (\varphi_1 \times \varphi_2)^* M'' \cong \varphi_2^* M'$ を得る。そして、 M''' を用いることでこれらの同一視は整合的であり、それゆえこの定義に問題はない。簡単に言うと、加群を \mathcal{U} -局所的に与えることと U_* 上のカルテジアン図式 M^* を与えることは同じことである。

代数的に変換してみると、 M^* を与えることは環の図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \partial_0 & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 B & & B \otimes_A B & \xrightarrow{\partial_1} & B \otimes_A B \otimes_A B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & \partial_1 & & \\
 & & & & \partial_2 \\
 & & & & \curvearrowright \\
 & & & &
 \end{array}$$

の上の加群のカルテジアン図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \partial_0 & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 M' & & M'' & \xrightarrow{\partial_1} & M''' \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & \partial_1 & & \\
 & & & & \partial_2 \\
 & & & & \curvearrowright \\
 & & & &
 \end{array}$$

を与えることに等しい。

[補足: $\partial_i(bm) = \partial_i(b)\partial_i(m)$ であるから、よくある同一視 $\partial_0\partial_1 = \partial_0\partial_0$ は正しい。また、"カルテジアン"は射 $\partial_i: M' \otimes_B \partial_i(B \otimes_A B) \rightarrow M''$ と $M'' \otimes_{B \otimes_A B} \partial_i(B \otimes_A B \otimes_A B) \rightarrow M'''$ が同型であることを意味する。]

関手 $E \mapsto E_{\mathcal{U}}$ は A 加群 M にたいして $M^* = (M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B)$ を対応させる関手になる。

この関手の右随伴は関手

$$(M' \rightarrow M'' \rightarrow M''') \mapsto \ker(M' \rightarrow M'')$$

である。

我々はさらに追加の射

$$M \rightarrow \ker(M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \otimes_A B)$$

と

$$\ker(M' \rightarrow M'') \otimes_A B \rightarrow M'$$

が同型になることを示す必要がある。命題 1.1 の (i) からある忠実平坦射 $A \rightarrow A'$ によって底変換した後に示せば良い。(B は $B' = B \otimes_A A'$ になる) $A' = B$ とすれば、 $U \rightarrow X$ が切断を保つ場合に帰着できる。 □

1.5 Un cas particulier: le theoreme 90 de Hilbert

1.5.1 準備

k を体、 k' を k のガロア拡大体とし、 $G := \text{Gal}(k'/k)$ とする。このとき、準同型

$$\begin{aligned}
 k' \otimes_k k' &\longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in G} k' \\
 x \otimes y &\longmapsto \{x\sigma(y)\}_{\sigma \in G}
 \end{aligned}$$

は全単射である。

$\text{Spec}(k)$ 上の $\text{Spec}(k')$ から生成される篩において局所的な加群を与えることと、群 G の半線形作用をもつ k' 線型空間を与えることは同値である。すなわち、次のものを与える

- (a) k' 線型空間 V' 。
- (b) 任意の $\sigma \in G$ について V' の加法群の構造に関する自己準同型 φ_σ であって、任意の $\lambda \in k'$ と $v \in V'$ について $\varphi_\sigma(\lambda v) = \sigma(\lambda)\varphi_\sigma(v)$ であり、次を満たすもの。
- (c) 任意の $\sigma, \tau \in G$ について $\varphi_{\tau\sigma} = \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma$ 。

$V = V'^G$ として G の作用により普遍的な V' の部分群とする。これは k 線型空間であり、定理 1.2 より、次を得る。

1.5.2 ヒルベルトの定理 90

命題 1.3. V から V' への包含写像は同型*9 $V \otimes_k k' \rightarrow V'$ を得る。

特に、 V' の次元が 1 とし、 $v' \in V'$ が 0 でない元とすると、 φ_σ はある定数 $c(\sigma) \in k'^*$ によって、 $\varphi_\sigma(v') = c(\sigma)v'$ と定められる。そして、三つ目の条件は

$$c(\tau\sigma) = c(\tau)\tau(c(\sigma))$$

を満たすことと書ける。

命題 1.3 によれば、非零で G によって不変なベクトル $v = \mu v'$ を得る。ここで $\mu \in k'^*$ である。このとき任意の $\sigma \in G$ について

$$c(\sigma) = \mu\sigma(\mu^{-1})$$

となる。

すなわち、 G の k'^* 係数の任意の 1-コサイクルはコバウンダリーである。

1.5.3 コホモロジーによるヒルベルトの定理 90

系 1.4. $H^1(G, k'^*) = 0$

1.6 Topologies de Grothendieck

我々は今、ここまでの節で定義されたものを、位相空間とスキーム両方の面から抽象化する。

1.6.1 crible

S を圏とし、 U を S の対象とする。 \mathcal{U} が U 上の篩 (crible) であるとは、 S/U の対象の族であって、もし $\varphi: V \rightarrow U$ が \mathcal{U} に属し、 $\psi: W \rightarrow V$ が S の射であるとき、その合成 $\varphi \circ \psi: W \rightarrow U$ が \mathcal{U} に属することをいう。

もし $\{\varphi_i: U_i \rightarrow U\}$ が射の族であるとき、 $\{U_i\}$ から生成される篩とは、定義から、 S の射 $\varphi: V \rightarrow U$ であって、ある φ_i を経由するものすべての族のことである。

*9 k' 線型空間としての

\mathcal{U} を U 上の篩であり、 $\varphi: V \rightarrow U$ を射とする。このとき、 \mathcal{U} の V への制限 \mathcal{U}_V とは、定義から、 $\varphi \circ \psi: W \rightarrow U$ が \mathcal{U} に含まれるような射 $\psi: W \rightarrow V$ からなる V 上の篩である。

1.6.2 グロタンディーク位相

S 上のグロタンディーク位相 (topologie de Grothendieck) とは、任意の S の対象 U に対して、その被覆篩 (cribles couvrants) と呼ばれる、次の公理を満たす篩の族 $C(U)$ からなるものである。

- (a) U 上の恒等射から生成される篩は被覆篩である。
- (b) \mathcal{U} が U の被覆篩であり、射 $V \rightarrow U$ が与えられたとき、その制限 \mathcal{U}_V が V の被覆篩である。
- (c) 局所被覆篩は被覆篩である。すなわち、 U 上の被覆篩 \mathcal{U} と U 上の篩 \mathcal{U}' であって、任意の \mathcal{U} の対象 $V \rightarrow U$ について、制限 \mathcal{U}'_V が V の被覆篩であるとき、 \mathcal{U}' は U の被覆篩になる。

景 (site) とは、グロタンディーク位相が与えられた圏のことである。

1.6.3 前層

景 S が与えられたとき、 S 上の前層 (prefaisceau) とは S から集合の圏への反変関手 \mathcal{F} のことである。任意の S の対象 U について、 U 上の切断 (section) とは、 $\mathcal{F}(U)$ の元のことである。任意の射 $V \rightarrow U$ と任意の $s \in \mathcal{F}(U)$ について s の V への制限 (restreint) を $s|_V$ と書き、これによって、 s の $\mathcal{F}(V)$ への像を表す。

\mathcal{U} を U 上の篩とする。切断の族が \mathcal{U} -局所的に与えられているとは、任意の \mathcal{U} に属する $V \rightarrow U$ に対して、切断 $s_V \in \mathcal{F}(V)$ が与えられ、任意の $W \rightarrow V$ について $s_V|_W = s_W$ を満たしていることとする。 \mathcal{F} が層 (faisceau) であるとは、任意の S の対象 U と U 上の任意の被覆篩 \mathcal{U} と任意の \mathcal{U} -局所的に与えられた切断 $\{s_V\}$ について、任意の \mathcal{U} の対象 $V \rightarrow U$ について $s|_V = s_V$ となるようなただ一つの切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在することをいう。

同様に、アーベル層 (faisceaux abeliens) を集合の圏であるところをアーベル群の圏に置き換えたものとする。ここで、 S 上のアーベル層からなる圏は十分な単射的对象を含むアーベル圏になることがわかる。アーベル層からなる列 $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ が完全 (exacte) であるとは、任意の S の対象 U と任意の $s \in \mathcal{G}(U)$ であって、 $g(s) = 0$ を満たすものを取り、局所的に $f(t) = s$ となるような t が存在することをいう。すなわち、 U 上の被覆篩 \mathcal{U} が存在し、任意の $V \in \mathcal{U}$ についてある切断 $t_V \in \mathcal{F}(V)$ が存在して、 $f(t_V) = s|_V$ を満たす。

1.6.4 いくつかの例

上で指摘したことを考える。

- (a) X を位相空間、 S を X の開集合を対象とし、自然な包含写像を射とするような圏とする。 X の標準的な位相に対応する S 上のグロタンディーク位相とは、 X の開集合 U 上の位相空間における篩 \mathcal{U} が被覆篩であることを、その篩に含まれる開集合の和集合が U と一致するものとして定めたものである。 S 上の層の圏と通常の意味の X 上の層の圏は同値である。
- (b) X をスキームとし、 S を X 上のスキームの圏とする。 S 上の忠実平坦準コンパクト位相 (topologie fpqc (fidelement plate quasi-compacte)) を X -スキーム U 上の篩が被覆篩であることを、 U への平坦射の有限集合であって、その U への像が U を被覆するものから生成される篩として定めたグロタン

ディーク位相のこととする。

1.6.5 コホモロジー

圏 \mathcal{S} が終対象 X を持つとする。このとき、アーベル層 \mathcal{F} の大域切断 (sections globales) を群 $\mathcal{F}(X)$ のことと定め、これを $\Gamma\mathcal{F}$ もしくは $H^0(X, \mathcal{F})$ と書く。関手 $\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{F}$ は \mathcal{S} 上のアーベル層の圏からアーベル群の圏への左完全関手である。その導来関手を $H^i(X, \cdot)$ と書く。(ou satellites)^{*10} コホモロジー群は局所と大域の間のズレを表現する。定義から、アーベル層の完全列 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ について、以下のコホモロジー長完全列を得る。

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

1.6.6 torseur

\mathcal{F} を \mathcal{S} 上のアーベル層とする。 \mathcal{F} -捻子 (\mathcal{F} -torseur) とは、層 \mathcal{G} と \mathcal{F} の作用 $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ の組であって、局所的に標準的な \mathcal{F} の、自身による作用 $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ の組と同型になるものである。ここで、「局所的に」とは、「終対象 X のある被覆篩の任意の元に制限することで」という意味である。

ここで、 $H^1(X, \mathcal{F})$ は \mathcal{F} -捻子の同型類の集合として表すことができる。

2 Topologie etale

ここまでの章で定義されたものを、その特殊な場合であるスキーム X のエタール位相についてを 3 節まで考える。4 節では、特に X を体 K のスペクトラムとすると、そのコホモロジーが K のガロアコホモロジーと対応することを見る。

2.1 Topologie etale

最初に、エタール射についての確認から始める。

2.1.1 エタール

定義 2.1. A を (可換) 環とする。 A 代数 B がエタール (etale) であるとは、 B が A 代数として有限表示であり、以下の同値な条件を満たすことである。

- (a) 任意の A 代数 C とそのイデアル J であって $J^2 = 0$ となるものすべてに対し、 A 代数の準同型の間の標準的な対応

$$\mathrm{Hom}_A(B, C) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(B, C/J)$$

は全単射である。

^{*10} 訳がわからない

- (b) B は A 加群として平坦であり、 $\Omega_{B/A} = 0$ である。ここで、 $\Omega_{B/A}$ は相対微分加群である。
- (c) B が $B = A[X_1, \dots, X_n]/I$ と表され、 I を含む $A[X_1, \dots, X_n]$ の任意の素イデアル \mathfrak{r} について、ある多項式 $P_1, \dots, P_n \in I$ が存在して、 I の局所化 $I_{\mathfrak{r}}$ は P_1, \dots, P_n の像によって生成され、 $\det(\partial P_i / \partial X_j) \notin \mathfrak{r}$ となる。

[cf. SGA 1, exposé I ou M. RAYNAUD, Anneaux Locaux Henséliens, chapitre V]

そして、スキームの射 $f: X \rightarrow S$ が**エタール (etale)** であるとは、任意の $x \in X$ について $f(x)$ のあるアフィン開近傍 $U = \text{Spec}(A)$ と $X \times_S U^{*11}$ に含まれる x のあるアフィン開近傍 $V = \text{Spec}(B)$ が存在して、 B は A 代数としてエタールになることである。

2.1.2 エタール射の例

- (a) A を体、 B を A 代数とする。このとき、 B がエタールであることと B が A のある分離拡大の有限個直積と同型になることは同値である。
- (b) \mathbb{C} 上の有限型のスキーム X と S について、射 $f: X \rightarrow S$ がエタールであることとこれらに付随する複素解析空間 X^{an} と S^{an} とその間の射 $f^{an}: X^{an} \rightarrow S^{an}$ が局所同相写像であることは同値である。

2.1.3 エタール射の性質

prop:morphism-between-etale

- (a) (底変換) $f: X \rightarrow S$ をエタール射とすると、任意の射 $S' \rightarrow S$ による底変換 $f_{S'}: X \times_S S' \rightarrow S'$ もエタール射である。
- (b) (結合則) 二つのエタール射の合成はエタール射である。
- (c) $f: X \rightarrow S$ と $g: Y \rightarrow S$ を二つのエタール射とすると X と Y の間の S -射はエタール射である。
- (d) (降下性) $f: X \rightarrow S$ を射とする。このとき、忠実平坦射 $S' \rightarrow S$ が存在して $f_{(S')}: X \times_S S' \rightarrow S'$ がエタール射であるとき、 f はエタール射になる。

2.1.4 エタール位相

X をスキーム、 S をエタールな X -スキームからなる圏とする。このとき ?? より、 S における任意の射はすべてエタール射である。ここで、 S 上の**エタール位相 (topologie etale)** を、 U 上の篩 \mathcal{U} が被覆篩であることを、 S における有限個の射 $\varphi_i: U_i \rightarrow U$ であって、その φ_i による像が U を被覆するようなものから生成される篩であることで定める。このエタール位相を持った圏 S を X の**エタール景 (site etale)** といい、 X_{et} と書く。

2.2 Exemples de faisceaux

2.2.1 Faisceau constant

C をアーベル群とし、簡単のため X をネータースキームとする。このとき、 $U \mapsto C^{\pi_0(U)}$ で定義される X_{et} 上の層を C_X 、もしくは、混乱の無い限りに置いて、単に C と書く。ここで、 $\pi_0(U)$ は (有限個の) U の

*11 これは $f^{-1}(U)$ に等しい

連結成分の集合である。^{*12}とくに重要なものは $C = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ としたときである。このとき、定義から

$$H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\pi_0(X)}$$

となる。さらに、 $H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は 1.6.6 より、 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -捻子の同型類の集合である。すなわち、群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ による、 X のエタールガロア被覆のことである。とくに、 X が連結で任意の点における基本群を $\pi_1(X)$ とするとき、

$$H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

である。

2.2.2 Groupe multiplicatif

$U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U^\times)$ で定義される X_{et} 上の層を $\mathbb{G}_{m,X}$ 、もしくは、混乱の無い限りに置いて、単に \mathbb{G}_m と書く。この層は忠実平坦降下定理 1.2 において良く振る舞う層である。定義から、

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) = H^0(X, \mathcal{O}_X)^\times$$

となる。とくに X が被約、連結、代数閉体 k 上固有なスキームであるとき、

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) = k^*$$

となる。

2.2.3 ピカール群との同型

$\text{Pic}(X)$ を X 上の可逆層の同型類^{*13}とするととき、同型

$$H^1(X, \mathbb{G}_m) = \text{Pic}(X)$$

がある。

証明. X 上の可逆層 \mathcal{L} に対して X_{et} 上の前層 \mathcal{L}^* を対応させる関手 $*$ を次のように定める。エタール射 $\phi: U \rightarrow X$ について

$$\mathcal{L}^*(U) = \text{Isom}_U(\mathcal{O}_U, \phi^* \mathcal{L})$$

と定める。

ここで、命題 1.1(i) と 定理 1.2(忠実平坦性) から、この前層は層である。とくにこれは \mathbb{G}_m -捻子である。次がすぐに確かめられる。

- (a) 関手 $*$ は (エタール) 局所化^{*14}と整合的であること。

^{*12} $C^{\pi_0(U)}$ でその連結成分ごとに値をとる写像のことを表している。すなわち、 C に離散位相を入れたときの U から C への連続写像全体である。

^{*13} 厳密にはそれに加えてテンソル積によって可換な和を入れた可換群である

^{*14} compatible compatible à la localisation (étale)

- (b) 自明な可逆層 (すなわち、 \mathcal{O}_X と同型な層) の成す圏と自明な \mathbb{G}_m -捻子の成す圏は圏同値であること。
よって、 \mathcal{L} が自明であることと \mathcal{L}^* が自明であることが同値になる。
- (c) さらに 命題 1.1(ii) と 定理 1.2 から、可逆層の概念はエタール位相について局所的である。^{*15}

(a)、(b)、(c) から形式的に $*$ が X 上の可逆層の成す圏と X_{et} 上の \mathbb{G}_m -捻子の成す圏の間の圏同値を与えることがわかる。そしてこれは求められている同型を誘導する。この同値の逆を構成する。 T を \mathbb{G}_m -捻子とすると X の、ある有限個からなるエタール被覆 $\{U_i\}$ であって捻子 T/U_i が自明になるものが存在する。^{*16}すると、 $\{U_i\}$ から生成される篩 $\mathcal{U} \subset X_{et}$ に含まれる任意の X 上のエタール射 V に対して、 T は自明になる。任意の $V \in \mathcal{U}$ に対して、 $T|_V$ は可逆層 \mathcal{L}_V ^{*17} に対応する。((b) から) そして、 \mathcal{L}_V は \mathcal{U} -局所的に与えられた可逆層 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ を構成する。((a) から) (c) より、これは最終的に X 上の可逆層 $\mathcal{L}(T)$ を与え、 $T \mapsto \mathcal{L}(T)$ は $*$ の逆になっている。 \square

2.2.4 Racines de l'unité

任意の $n > 0$ について、1 の n 乗根の層 (faisceau des racines n -ièmes de l'unité) を μ_n と書き、これを \mathbb{G}_m 上の n 乗写像の核として定める。 X を分離閉体 k 上のスキームとし、 n が k において可逆な正整数とすると、1 の原始 n 上根 $\zeta \in k$ がとれて、これは $i \rightarrow \zeta^i$ によって、定数層 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と μ_n との同型を与える。

μ_n 係数のコホモロジーと \mathbb{G}_m 係数のコホモロジーとの間の関係は次のコホモロジーの完全列によって与えられる。

2.2.5 Theorie de Kummer

n を X において可逆な正整数とすると、 \mathbb{G}_m 上の n 乗写像は層としての自己準同型になる。このとき、完全列

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 0$$

を得る。^{*18}

証明. $U \rightarrow X$ をエタール射として、 $a \in \mathbb{G}_m = \Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$ とする。 n は U 上で可逆なので、方程式 $T^n - a = 0$ は分離的である。それゆえ、 $U' = \text{Spec}(\mathcal{O}_U[T]/(T^n - a))$ は U においてエタールである。さらに $U' \rightarrow U$ は全射だから U' 上で 1 の原始 n 乗根を持つので結論を得る。 \square

2.3 Fibres, images directes

2.3.1 点の性質

射 $\bar{x} \rightarrow X$ について \bar{x} がある分離閉体 $\kappa(\bar{x})$ のスペクトラムであるとき、これを X の幾何学的点 (point geometrique) という。混乱の無い限りにおいて、 $\bar{x} \rightarrow X$ を単に \bar{x} と書く。 x を \bar{x} の像とすると、 \bar{x} は x の中心 (centre) であるという。また、幾何学的点 \bar{x} についてその体 $\kappa(\bar{x})$ が剰余体 $\kappa(x)$ の代数拡大であるとき、 \bar{x} を X の代数幾何学的点 (point geometrique algebrique) という。

^{*15} 局所的に可逆層が与えられれば全体で与えること。

^{*16} T/U_i は T の U_i への制限と考えてよく、捻子の定義から被覆が取れる。

^{*17} 準連接層に対して section 1.4.4 で定めた記号

^{*18} 左から三つ目の射は n 乗自己準同型である。

幾何学的点 \bar{x} のエタール近傍 (voisinage etale) とは次のような、図式

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow & \downarrow \\ \bar{x} & \longrightarrow & X \end{array}$$

を可換にする持ち上げ $\bar{x} \rightarrow U$ を持つようなエタール射 $U \rightarrow X$ のことである。

X の \bar{x} における局所化 (localise strict) とは環 $\mathcal{O}_{X,\bar{x}} := \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ のことである。ここで、この順極限は \bar{x} のエタール近傍によるものである。この環は強ヘンゼル局所環であって、その剰余体は x の X における剰余体 $\kappa(x)$ の分離閉包になっている。これがエタール位相における局所環の役割を果たす。

2.3.2 ファイバー

\mathcal{F} を X_{et} 上の層とする。 x における \mathcal{F} のファイバー (fibre) とは集合 (もしくは群など^{*19}) $\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim \mathcal{F}(U)$ のことである。ここで、順極限は同様に \bar{x} のエタール近傍によるものである。

任意の層の間の準同型 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ について、それぞれ、モノ射、エビ射、同型射であることと任意の幾何学的点 \bar{x} についてファイバー上に誘導される射 $\mathcal{F}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{G}_{\bar{x}}$ がモノ射、エビ射、同型射であることが同値である。もし X が代数閉体上有限型ならば X の有理点についてのみで十分である。

2.3.3 順像

$f: X \rightarrow Y$ をスキームの射として、 \mathcal{F} を X_{et} 上の層とする。このとき、 \mathcal{F} の f による順像 (image directe) $f_*\mathcal{F}$ とは、 Y_{et} 上の層であって、 Y 上エタールな任意のスキーム V に対し、 $f_*\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}(X \times_Y V)$ と定義されるものである。

この関手 $f_*: (\text{Faisc. Ab.})/X_{et} \rightarrow (\text{Faisc. Ab.})/Y_{et}$ は左完全である。このとき、右導来関手 $R^q f_*$ が取れて、これを高次順像 (images directes superieures) という。とくに、 \bar{y} を Y の幾何学的点とすると、

$$(R^q f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \varinjlim H^q(V \times_Y X, \mathcal{F})$$

となる。ここで、この順極限は \bar{y} のエタール近傍 V によるものである。

$\mathcal{O}_{Y,\bar{y}}$ を Y の \bar{y} における局所化とし、 $\tilde{Y} := \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\bar{y}})$ とおいて、 $\tilde{X} := X \times_Y \tilde{Y}$ とおく。このとき、エタール層 \mathcal{F} は次のように \tilde{X}_{et} 上へと拡張ができる。(これは一般的逆像 (generale d'image reciproque) の特殊な場合である) \tilde{U} を \tilde{X} 上のエタールなスキームとする。このとき Y_{et} におけるある \bar{y} のエタール近傍 V と $X \times_Y V$ 上のエタールなスキーム U であって、 $\tilde{U} = U \times_V \tilde{Y}$ となるものが存在する。このとき、

$$\mathcal{F}(\tilde{U}) := \varinjlim \mathcal{F}(U \times_V V')$$

と定める。ここで、この順極限は \bar{y} のエタール近傍 V' であって、 V の中で支配的なものによるものである。同様に、この定義から

$$(R^q f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = H^q(\tilde{X}, \mathcal{F})$$

となる。

^{*19} それぞれ \mathcal{F} の値域に対応する対象。

関手 f_* は左随伴 f^* を持つ。これを**逆像** (image reciproque) という。 \bar{x} を X の幾何学的点とし、その f による像を $f(\bar{x})$ とする。このとき、^{*20} $(f^*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \mathcal{F}_{f(\bar{x})}$ となる。これより、 f^* は完全関手であることがわかる。また、関手 f_* は単射的層を単射的層へと移し、関手の合成 $\Gamma \circ f_*$ (または、 g_*f_*) からなるスペクトル系列は次を与える。

2.3.4 Suite spectrale de Leray

\mathcal{F} を X_{et} 上のアーベル層とし、 $f: X \rightarrow Y$ をスキームの射 (または、 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ をスキームの射) とする。このとき、以下のスペクトル系列を得る。

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}),$$

(または、 $E_2^{pq} = R^p g_* R^q f_* \mathcal{F} \Rightarrow R^{p+q}(gf)_* \mathcal{F}$.)

2.3.5 系

系 2.2. 任意の $q > 0$ について $R^q f_* \mathcal{F} = 0$ ならば、任意の $p \geq 0$ について $H^p(Y, f_* \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F})$ となる。(または、 $R^p g_*(f_* \mathcal{F}) = R^p(gf)_* \mathcal{F}$ となる。)

以上のことは、とくに以下の状況に適用させる。

2.3.6 消失定理

命題 2.3. $f: X \rightarrow Y$ を有限なスキームの射とする。(以降に出てくる射のほとんどはこの性質を持つ) \mathcal{F} を X 上のアーベル層とすると、 $R^q f_* \mathcal{F} = 0$ が任意の $q > 0$ で成り立つ。

\bar{y} を Y の幾何学的点、 \tilde{Y} を y における Y の局所化のスペクトラム、 $\tilde{X} = X \times_Y \tilde{Y}$ とする。ここまでのことから、任意の $q > 0$ について、 $H^q(\tilde{X}, \mathcal{F}) = 0$ であることを示せば良い。実際、 \tilde{X} は強ヘンゼル局所環の積のスペクトラムになり、 [cf. Anneaux locaux henséliens, chapitre I], 関手 $\Gamma(\tilde{X}, \cdot)$ は完全関手である。なぜなら、任意のエタールかつ全射な \tilde{X} -スキームについてそれが成り立つからである。

2.4 Cohomologie galoisienne

$X = \text{Spec}(K)$ を体のスペクトラムとすると、 X のエタールコホモロジーと K のガロアコホモロジーが一致することがわかる。

2.4.1 analogie topologique

最初に位相空間的な類似から始める。 K を \mathbb{C} 上整アフィン代数多様体 $Y = \text{Spec}(A)$ の関数体とすると、 $K = \varinjlim f \in AA[1/f]$ と表示することができる。

言い換えると、 $X = \text{Spec}(K)$ について、 U を Y の任意の開集合上で動かすとき、 $X = \varprojlim U$ となる。ここで、古典的な位相空間論によって、 $K(\pi, 1)$ ^{*21} の条件を満たす任意に小さいザリスキー開集合が存在することが知られている。それ故、 $\text{Spec}(K)$ 自体が $K(\pi, 1)$ であると考えても問題ない。ここで、 π は代数的な意味での X の基本群、すなわち、 K の分離閉包 \bar{K} についての拡大 \bar{K}/K のガロア群のことである。

^{*20} Y 上の層 \mathcal{F} について考える。

^{*21} <https://achinger.impan.pl/thesis.pdf> 参照。

2.4.2 subsection name

より正確には、体 K とその分離閉包 \bar{K} と、そのガロア位相群 $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ について、任意の K 上有限エタール代数 A (K の分離拡大の有限個直積と同型である) に対して、 $\text{Hom}_K(A, \bar{K})$ は有限集合になる。ガロア群 G はこの集合に商を経由して離散 (すなわち有限) 的に作用する。例えば $A = K[T]/(F)$ とすると、 $\text{Hom}_K(A, \bar{K})$ は多項式 F の \bar{K} に含まれている根の集合と同一視できる。グロタンディークによるガロア理論は次のようなことを述べる。

2.4.3 圏同値 1

命題 2.4. 次の関手

$$(\text{有限エタール } K \text{ 代数}) \rightarrow (G \text{ が連続に作用する有限集合})$$

をエタール代数 A に対して、集合 $\text{Hom}_K(A, \bar{K})$ を与えるものとする、これは反変圏同値を与える。

これを $\text{Spec}(K)$ 上のエタール位相における層の理論において、この類似を考えることができる。

2.4.4 圏同値 2

命題 2.5. 次の関手

$$(\text{Spec}(K) \text{ 上のエタール層}) \rightarrow (G \text{ が連続に作用する有限とは限らない集合})$$

をエタール層 \mathcal{F} に対して、 $\text{Spec}(K)$ の幾何学的点 $\text{Spec}(\bar{K})$ におけるファイバー $\mathcal{F}_{\bar{K}}$ を与えるものとする、これは圏同値を与える。

G が集合 E に連続に作用しているとき、 E の任意の元を動かさない G の元全体は G の開部分群になる。逆方向の関手は明らかな方法で構成される。すなわち、 A を有限エタール K 代数とし、 $U = \text{Spec}(A)$ について、 $U(\bar{K}) = \text{Hom}_K(A, \bar{K})$ を A に対応する G -集合とする。このとき、 $\mathcal{F}(U) := \text{Hom}_{G\text{-Sets}}(U(\bar{K}), \mathcal{F}_{\bar{K}})$ となる。^{*22}

特に、 $X = \text{Spec}(K)$ について、 $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}_{\bar{K}}^G$ である。ここで、アーベル層に制限して考えると、導来関手を経由して、標準的な同型

$$H^q(X_{\text{et}}, \mathcal{F}) = H^q(G, \mathcal{F}_{\bar{K}})$$

を得る。^{*23}

2.4.5 対応するものたちの例

- (a) 定数層 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対しては、自明な G の作用をもつ集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が対応する。
- (b) 1 の n 乗根の層は自然な G の作用を持つ \bar{K} の中の 1 の n 乗根の集合 $\mu_n(\bar{K})$ が対応する。
- (c) 層 \mathbb{G}_m は自然な G の作用を持つ乗法群 \bar{K}^* に対応する。

^{*22} 2.1.2 によって、体上エタールなスキームはすべて有限エタール K 代数のスペクトラムとして表すことができる。なぜなら、いま考えているスキームは準コンパクトであるから、有限個の体の直積からなるアフィン開集合の有限個の和で覆うことができるからである。

^{*23} エタールコホモロジーを与える導来関手はエタール層の大域切断の右導来関手で、ガロアコホモロジーを与える導来関手は G -集合の不変部分集合をとるもので与えられているため同型になることがわかる。

3 Cohomologie des courbes

位相空間論において、Kunnuth の公式による devissage と単体分割によって、単位区間 $I = [0, 1]$ のコホモロジーを計算することに帰着させることができる。ここで、 I のコホモロジーは $H^0(I, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ と $q > 0$ について $H^q(I, \mathbb{Z})$ である。

位相空間論とは異なる我々の設定において、devissage を行うと、代数閉体上の曲線のような単位区間よりも複雑な対象に帰着される。そのため、この章ではこのコホモロジーの計算を行う。このコホモロジーは $q > 2$ のときのみ消えるため、位相空間のものよりも複雑である。計算する上で本質的な道具は、そのような曲線上の関数体による Brauer 群の消失 (section 3.2.3) である。

3.1 Le groupe de Brauer

最初は多くの古典的な定義を思い出すことから始める。

3.1.1 中心的単純代数

定義 3.1. K を体、 A を有限次 K 代数とする。このとき、 A が**中心的単純代数** (algebre simple centrale) とは、以下の同値な条件を満たすもののことである。

- (a) A は非自明な両側イデアルを持たず、その中心は K と一致する。
- (b) K の有限次ガロア拡大 K' であって、 $A_{K'} := A \otimes_K K'$ が、ある K' 係数の正方行列からなる K' 代数と K' 同型である。
- (c) A は K を中心に持つようなある斜体を係数に持つ正方行列からなる代数と K 同型である。

二つの中心的単純代数が**相似** (equivalentes) であるとは、(c) における斜体が K 代数として同型になることとする。もしそれら二つの代数が K 上同じ次元であれば、相似であるとき、代数それ自身が K 同型になる。テンソル積は、相似による同値類の上に商を経由することでアーベル群の構造を与える。この群を古典的に K の**ブラウアー群** (le groupe de Brauer) といい、 $\text{Br}(K)$ と書く。

3.1.2 ブラウアー群の定式化

A を K 代数であって、 K の有限次ガロア拡大 K' が存在して、 $A_{K'}$ が K' 係数の $n \times n$ 正方行列からなる K' 代数 $M_n(K')$ と K' 代数として同型になるものとする。 $\text{Br}(n, K)$ によってそのような K 代数からなる、 K 同型による同値類全体の集合を表す。定義から、任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\text{Br}(n, K)$ は $\text{Br}(K)$ の部分集合であり、これらの和集合をとると $\text{Br}(K)$ に一致する。 \bar{K} を K の代数閉包として、 $G := \text{Gal}(\bar{K}/K)$ とする。集合 $\text{Br}(n, K)$ は $M_n(\bar{K})$ の”形”をした集合であり、 $H^1(G, \text{Aut}(M_n(\bar{K})))$ と標準的な同型がある。

$M_n(\bar{K})$ の自己同型は内部自己同型であることが知られている。ゆえに、自己同型群 $\text{Aut}(M_n(\bar{K}))$ は射影線形群 $\text{PGL}(n, \bar{K})$ と同一視でき、標準的な全単射

$$\theta_n: \text{Br}(n, K) \rightarrow H^1(G, \text{PGL}(n, \bar{K}))$$

が得られる。

一方、完全列

$$1 \rightarrow \overline{K}^* \rightarrow GL(n, \overline{K}) \rightarrow PGL(n, \overline{K}) \rightarrow 1 \quad (3.1)$$

から、境界作用素

$$\Delta_n: H^1(G, PGL(n, \overline{K})) \rightarrow H^2(G, \overline{K}^*)$$

が定義できる。

θ_n と Δ_n の合成によって、写像

$$\delta_n: \text{Br}(n, K) \rightarrow H^2(G, \overline{K}^*)$$

を得る。

写像 δ_n がそれぞれ両立しており、以下のような群準同型を与えることが簡単に確かめることができる。

$$\delta: \text{Br}(K) \rightarrow H^2(G, \overline{K}^*).$$

3.1.3 δ の全単射性

命題 3.2. 準同型 $\delta: \text{Br}(K) \rightarrow H^2(G, \overline{K}^*)$ は全単射である。

この命題は次の二つの補題から従う。

3.1.4 補題 1

補題 3.3. 写像 $\Delta_n: H^1(G, PGL(n, \overline{K})) \rightarrow H^2(G, \overline{K}^*)$ は単射である。

[14] の I-44 によれば、 $H^1(G, PGL(n, \overline{K}))$ の元によって (3.1) をある回数捻ることによって、真ん中の群の $H^1(G, GL(n, \overline{K}))$ が消えることを確認すれば十分である。この真ん中の群 $GL(n, \overline{K})$ は K 上階数 n^2 の中心単純代数 A の乗法群の \overline{K} -点からなる群である。 $H^1(G, A_{\overline{K}}^*) = 0$ を示すために、 A^* を階数 1 の自由 A 加群 L 上の自己同型群とみなす。そして、 $H^1(G, A_{\overline{K}}^*)$ を L の”形”をした集合 (K 上階数 n^2 の A 加群 (自動的に自由加群になる)) とみなす。

3.1.5 補題 2

補題 3.4. $\alpha \in H^2(G, \overline{K}^*)$ をとる。 K' を K 上の有限次拡大体であって、 \overline{K} に含まれるものとし、 $n := [K' : K]$ と $G' := \text{Gal}(\overline{K}/K')$ とおく。もし、 α の $H^2(G', \overline{K}^*)$ への像が 0 であれば、 α は Δ_n の像に含まれる。

まず、以下の同型

$$H^2(G', \overline{K}^*) \cong H^2(G, (\overline{K} \otimes_K K')^*)$$

があることに注意する。

(幾何学的には、 $x = \text{Spec}(K)$, $x' = \text{Spec}(K')$ とおき、 $\pi: x' \rightarrow x$ を標準的な射とすると、上の二つの補題は任意の $q > 0$ について $R^q \pi_* (\mathbb{G}_{m, x'}) = 0$ であることと、任意の $q \geq 0$ について $H^q(x', \mathbb{G}_{m, x'}) \cong H^q(x, \pi_* \mathbb{G}_{m, x'})$ であることを述べている。)

さらに、 K' を K 線型空間とみなしたとき、基底を一つ選ぶことで、準同型

$$(\overline{K} \otimes_K K')^* \rightarrow GL(n, \overline{K})$$

が定義できる。これは $x \in (\overline{K} \otimes_K K')^*$ に対して、 $\overline{K} \otimes_K K'$ 上の x を掛けるような自己準同型を対応させるものである。それゆえ、次のような、行が完全列になっているような可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{K}^* & \longrightarrow & (\overline{K} \otimes_K K')^* & \longrightarrow & (\overline{K} \otimes_K K')^*/\overline{K}^* \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \overline{K}^* & \longrightarrow & GL(n, \overline{K}) & \longrightarrow & PGL(n, \overline{K}) \longrightarrow 1 \end{array}$$

上の補題より、コホモロジーへと移すことで、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} H^1(G, (\overline{K} \otimes_K K')^*/\overline{K}^*) & \longrightarrow & H^2(G, \overline{K}^*) & \longrightarrow & H^2(G, (\overline{K} \otimes_K K')^*) \\ \downarrow & & \parallel & & \\ H^1(G, PGL(n, \overline{K})) & \xrightarrow{\Delta_n} & H^2(G, \overline{K}^*) & & \end{array}$$

ブラウアー群についてのとくにそれが消えることについて知ることは次の命題が示すとおり、ガロアコホモロジー論において非常に重要である。

3.1.6 ガロアコホモロジーとの関係

命題 3.5. K を体として、 \overline{K} を K の代数閉包とし、 $G := \text{Gal}(\overline{K}/K)$ とする。このとき、 K の任意の有限次拡大体 K' について、 $\text{Br}(K') = 0$ とする。このとき、以下の二つが成り立つ。

- (1) 任意の $q > 0$ について $H^q(G, \overline{K}^*) = 0$ 。
- (2) 任意の G ねじれ加群 F と任意の $q \geq 2$ について $H^q(G, F) = 0$ 。

(証明は、例えば J.P. SERRE, *Corps locaux ou Cohomologie galoisienne* に詳しい)

3.2 Le theoreme de Tsen

3.2.1 C_1 性

定義 3.6. 体 K が C_1 であるとは、任意の非定数な K 係数の斉次多項式 $f(X_1, \dots, X_n)$ であって、次数 d が n 次未満であるとき、 f が非自明な零点を持つことである。

3.2.2 C_1 とブラウアー群の関係

命題 3.7. K を C_1 である体とすると、 $\text{Br}(K) = 0$ である。

この命題によって、任意の斜体 D が K を中心に持ち、 K 上有限次であるとするとき D は K に等しいことがわかる。 r^2 を D の K 上の次元とし、 $\text{Nrd}: D \rightarrow K$ を被約ノルムとする。

(K 上のエタール位相について局所的に見ると、 D と行列代数 M_r の間に (非標準的な) 同型があり、被約ノルムは行列式と対応する。これは well-defined であり、 D と M_r の間は同型類のとり方によらない。なぜなら、 M_r の任意の自己同型は内部自己同型であり、二つの相似な行列の行列式は等しいからである。この対応は局所的な唯一性から、エタール位相の降下と $\text{Nrd}: D \rightarrow K$ との対応を局所的に定義する。)

$x \neq 0$ となる $x \in D$ について $\text{Nrd}(x) \cdots \text{Nrd}(x^{-1}) = 1$ より、 Nrd の零点は D の零元のみである。また、 $\{e_1, \dots, e_{r,2}\}$ を D の K 上の基底とし、 $x = \sum x_i e_i$ と表すと、 $\text{Nrd}(x)$ は次数 r の斉次多項式 $\text{Nrd}(x_1, \dots, x_{r,2})$

で書ける。(これはエタール位相について局所的には明らかである) K が C_1 であるとする、 $r^2 \geq r$ となり、したがって、 $r = 1$ で $D = K$ となる。

3.2.3 Tsen の定理

定理 3.8. k を代数閉体、 K を超越次数 1 の k の超越拡大とする。このとき K は C_1 である。

まず $K = k(X)$ とおき、

$$f(\underline{T}) := \sum a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}$$

を次数 $d (< n)$ で係数が $k(X)$ に含まれている、定数ではない斉次多項式とする。各係数の分母の公倍数を全体に掛けることで係数が $k[X]$ に含まれているとできる。ここで $\delta := \sup(a_{i_1, \dots, i_n})$ とおく。変数 $T_i (i = 1, \dots, n)$ を X についての次数 N の多項式にそれぞれ置き換え、その係数を不定元とみなすことにより $f(\underline{T}) = 0$ の $k[X]$ の中での非自明な零点を得ることを考える。すなわち、 $k[X]$ 上の方程式 $f(\underline{T}) = 0$ は次数 N の多項式 $T_i(X)$ の $n \times (N + 1)$ 個の係数を不定元とみなすことにより、斉次な方程式系を考えることになる。つまり、 $f(\underline{T})$ の各 T_i を X についての多項式 $T_i(X)$ に置き換えて X に関する多項式とし、それが多項式として 0 になるとき、その係数はすべて 0 に等しくなり、それらを方程式系として取る。この多項式系の次数は高々 $\delta + Nd$ であり、 $\delta + Nd + 1$ 本の $n \times (N + 1)$ 変数多項式系となる。いま、 k は代数閉体であるから、この方程式系はもし $n(N + 1) > Nd + \delta + 1$ であれば非自明な解を持ち、この不等式は $d < n$ であれば十分大きい N を取ることによって成り立つ。

一般的な設定でこの定理を示すためには K が k の純超越的拡大体 $k(X)$ の有限次拡大体である場合で示せば十分であることがすぐにわかる。 $f(\underline{T}) = f(T_1, \dots, T_n)$ を斉次多項式であって次数が $d < n$ である、係数を K にもつものとする。 $s := [K : k(X)]$ とおき、 e_1, \dots, e_s を $k(X)$ 上の K の基底とする。ここで sn 個の新しい変数 U_{ij} を取り、 $T_i = \sum U_{ij} e_j$ とおく。多項式 $f(\underline{T})$ が非自明な零点を K に持つことを示すためには、 $k(X)$ において多項式 $g(X_{ij}) = N_{K/k}(f(\underline{T}))$ が非自明な零点をもつことを示せば十分である。そして、 g は次数 sd の sn 変数の斉次多項式であり、最初に示したことから非自明な零点を持つことが従う。

3.2.4 Tsen の定理の系

系 3.9. k を代数閉体、 K を超越次数 1 の k の超越拡大とする。このとき、エタールコホモロジー $H^q(\text{Spec}(K), \mathbb{G}_m)$ は任意の $q > 0$ において消える。

3.3 Cohomologie des courbes lisses

以降ではとくに述べない限り、コホモロジー群と言ったらエタールコホモロジー群を考えるものとする。

3.3.1 エタールコホモロジーの計算

命題 3.10. k を代数閉体、 X を k 上の非特異連結射影代数曲線とする。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathbb{G}_m) &= k^* \\ H^1(X, \mathbb{G}_m) &= \text{Pic}(X) \\ H^q(X, \mathbb{G}_m) &= 0 \quad (q \geq 2). \end{aligned}$$

η を X の生成点とし、 $j: \eta \rightarrow X$ を標準的な射とし、 $\mathbb{G}_{m,\eta}$ を X の関数体 $K(X)$ 上の乗法群とする。任意の X の閉点 x について、 $i_x: x \rightarrow X$ を標準的な埋め込みとし、 \mathbb{Z}_x で x 上の \mathbb{Z} を値に取る定数層とする。このとき、 $j_*\mathbb{G}_{m,\eta}$ は X 上で消えない有理型関数の層になり、 $\bigoplus_{x \in X} i_{x*}\mathbb{Z}_x$ は因子の層になり、次の層の完全列を得る。

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow j_*\mathbb{G}_{m,\eta} \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{x \in X} i_{x*}\mathbb{Z}_x \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

3.3.2 導来関手の消失

補題 3.11. 任意の $q > 0$ について $R^q j_*\mathbb{G}_{m,\eta} = 0$ となる。

X の任意の閉点 x においてこの層のファイバーが消えることが示せれば良い。 $\mathcal{O}_{X,x}^\sim$ を X の x におけるヘンゼル化とし、 K を $\mathcal{O}_{X,x}^\sim$ の商体とすると、

$$\text{Spec}(K) = \eta \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^\sim)$$

となり、 $(R^q j_*\mathbb{G}_{m,\eta})_x = H^q(\text{Spec}(K), \mathbb{G}_m)$ となる。

いま、 K は $k(X)$ の代数拡大であるから、これは超越次数 1 の k の拡大より、系 3.9 より次が成り立つ。

3.3.3 第二項のコホモロジーの消失

補題 3.12. 任意の $q > 0$ について $H^q(X, j_{*\gt}\eta) = 0$ となる。

実際、補題 3.11 と j についての Leray のスペクトル系列から、

$$H^q(X, j_*\mathbb{G}_{m,\eta}) = H^q(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta})$$

が任意の $q \geq 0$ について成り立ち、二つ目の項は系 3.9 から消えることがわかる。

3.3.4 第三項のコホモロジーの消失

補題 3.13. 任意の $q > 0$ について、 $H^q(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*}\mathbb{Z}_x) = 0$ となる。

実際、 X の任意の閉点 x について、任意の $q > 0$ に対し、 $R^q i_{x*}\mathbb{Z}_x = 0$ になることが、 i_x が有限な射であることから命題 2.3 を適用することと、

$$H^q(X, i_{x*}\mathbb{Z}_x) = H^q(x, \mathbb{Z}_x)$$

からわかる。

この第二項は x が代数閉体のスペクトラムであるから、任意の $q > 0$ について消える。(この補題は X 上の任意の”摩天楼 (gratte-ciel)”層に対して一般化しても成り立つ。)

以上の補題と完全列 (3.2) から、等式

$$H^q(X, \mathbb{G}_m) = 0 \quad (q \geq 2)$$

が分かり、また、低次のコホモロジー完全列

$$1 \rightarrow H^0(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^0(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) \rightarrow H^0(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x) \rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow 1$$

は次の完全列

$$1 \rightarrow k^* \rightarrow k(X)^* \rightarrow \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 1$$

と等しい。

命題 3.10 から、 k の標数と互いに素であるような n について、 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を値に取るような X のコホモロジーが計算できる。これは意味のある値である。

3.3.5 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジー

系 3.14. X が種数 g で、 n を k の中で可逆な整数とする。このとき、任意の $q > 2$ について、 $H^q(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は消えて、 $q = 0, 1, 2$ についてはそれぞれ、階数が $1, 2g, 1$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 自由加群になる。 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をそれと同型な群 μ_n に置き換えると、標準的な同型

$$\begin{aligned} H^0(X, \mu_n) &= \mu_n \\ H^1(X, \mu_n) &= \text{Pic}^0(X)_n \\ H^2(X, \mu_n) &= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

を得る。

k は代数閉体だから、 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は μ_n と (非標準的に) 同型である。Kummer の完全列

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 0$$

と命題 3.10 から等号

$$H^q(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

が任意の $q > 2$ で成り立つ。そして、低次の完全列は

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mu_n) \rightarrow k^* \rightarrow k^* \\ \rightarrow H^1(X, \mu_n) \rightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{x} \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mu_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。

さらに、完全列

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

を得る。ここで、 $\text{Pic}^0(X)$ は次元 g のアーベル多様体 (X のヤコビ多様体) の k 値点からなる群と同一視できる。その群において n 倍写像は全射であり、その核は (n が k において可逆であるから) 階数 $2g$ の自由 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群となり、この系が示される。

”トレースの手法 (methode de la trace)”を用いる astucieux devissage によって、次の系を得る。

3.3.6 ねじれ層のコホモロジー

命題 3.15 ((SGA4 IX 5.7)). k を代数閉体とし、 X を k 上の代数曲線、 \mathcal{F} を X 上のねじれ層とする。このとき次が成り立つ。

- (1) 任意の $q > 2$ について $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.
- (2) X がアフィンであるとき、同様に任意の $q > 1$ について $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.

証明は”トレースの手法 (methode de la trace)”について述べられていることと同様に SGA4 IX 5 を参照する。

3.4 Devissages

次元が 1 より大きい多様体のコホモロジーを計算するために、曲線のファイブレーションが使われる。これによって、ファイバーの次元が 1 以下であるような射の議論に帰着できる。

3.4.1 射の例

A を有限型 k 代数とし、 a_1, \dots, a_n を A の生成系とする。 $X_0 := \text{Spec}(k)$ 、 $X_i := \text{Spec}(k[a_1, \dots, a_i])$ 、 $X_n := \text{Spec}(A)$ とおくと、標準的な包含写像 $k[a_1, \dots, a_i] \rightarrow k[a_1, \dots, a_i, a_{i+1}]$ はファイバーの次元が 1 以下であるような射 $X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$ が定義できる。

3.4.2 fibration elementaire

滑らかな射について、より詳しく考えられる。スキームの射 $f: X \rightarrow S$ が初等的ファイブレーション (fibration élémentaire) であるとは、次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{j} & \bar{X} & \xleftarrow{i} & Y \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} & \swarrow g & \\ & & S & & \end{array}$$

のように延長ができる射であって、以下の条件を満たすものことである。

- (1) j はそれぞれのファイバーの中で稠密な開埋め込みであり、さらに $X = \bar{X} \setminus Y$ となる。
- (2) \bar{f} は滑らかかつ射影的で、ファイバーは次元が 1 かつ幾何学的既約になる。
- (3) g はエタール被覆であり、 g の任意のファイバーは空ではない。

注意. ここで、射 $f: X \rightarrow Y$ がエタール被覆 (revêtement étale) であるとは、有限かつエタールな射であることである。

S -スキーム X が S に対して相対的に良い近傍 (bon voisinage) であるとは、スキームの列 $X = X_n, \dots, X_0 = S$ と初等的ファイブレーション $f_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ が $i = 1, \dots, n$ について存在することである。[SGA4 XI 3.3] で述べられているが、もし X が代数閉体 k 上の滑らかなスキームであるとする、任意の X の有利点は $\text{Spec}(k)$ に対して相対的に良い近傍になるような開近傍を持つ。

3.4.3 固有射の devissage

固有な射 $f: X \rightarrow S$ については、次のとおりに devissage できる。Chow の補題から、可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi} & \bar{X} \\ & \searrow f & \swarrow \bar{f} \\ & & S \end{array}$$

が存在する。ここで、 π と \bar{f} は射影的であり、 π はさらに、 X の稠密開集合上への同型射である。 S について局所的に、 \bar{X} は射影空間 \mathbb{P}_S^n の閉部分スキームになる。

斉次座標 (x_0, x_1, \dots, x_n) を (x_0, x_1) に移すものとする射影 $\varphi: \mathbb{P}_S^n \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ を考え、後者の devissage を行う。これは、斉次方程式 $x_0 = x_1 = 0$ で定まる \mathbb{P}_S^n の閉集合 $Y := \mathbb{P}_S^{n-2}$ の外側で定義された有理関数である。 $u: P \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ を Y の中心での爆発とすると、 u のファイバーは次元が 1 以下になる。さらに、自然な射 $v: P \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ であって、 φ を延長するようなものが存在する。そして、 v は \mathbb{P}_S^1 -スキーム P と次々に \mathbb{P}^1 へと射影できるような射影空間 \mathbb{P}^{n-1} の間の局所同型を導く。

3.4.4 pinceau de Lefschetz

滑らかな射影多様体 X を、リフシッツ束 (pinceau de Lefschetz) によって掃き出すことができる。 X と束の軸との共通部分による爆発 \tilde{X} は \mathbb{P}^1 に射影され、その射影のファイバーは束の超平面による X の超平面切断になる。

4 Theoreme de changement de base por un morphisme propre

4.1 Intrduction

この章は次の定理を証明し、適用することに専念する。

4.1.1 主定理

定理 4.1. $f: X \rightarrow S$ をスキーム間の固有な射とし、 F を X 上のねじれアーベル層とする。このとき、任意の $q \geq 0$ に対して、 S の幾何学的点 s への $R^q f_* \mathcal{F}$ のファイバーは f の s におけるファイバー $X_s = X \otimes_S \kappa(s)$ のコホモロジー $H^q(X_s, \mathcal{F})$ と同型になる。

注意. $R^q f_* \mathcal{F}$ の s へのファイバーとは、 $s \rightarrow S$ による S 上の層 $R^q f_* \mathcal{F}$ の逆像のことである。

位相空間の間の対応 $f: X \rightarrow S$ が、連続、固有、分離的 (分離的とは $X \times_S X$ の対角成分が閉であること) とし、 \mathcal{F} が X 上のアーベル層であるとする、以上の定理はよく知られていて初等的なものの類似になっている。つまり、 f は閉写像だから、 s の近傍 V に対して $f^{-1}(V)$ は X_s の基本近傍系を成し、 $H^*(X_s, \mathcal{F}) = \varinjlim U H^*(U, \mathcal{F})$ がわかる。ここで、 U は X_s の近傍を動く。実際、 X_s は、変異レトラクトであって、定数層 \mathcal{F} に対して、 $H^*(X_s, \mathcal{F}) = H^*(U, \mathcal{F})$ となる近傍 U からなる基本近傍系 \mathcal{U} も持つ。幾何学的には、special fiber (fibre speciale) が general fiber (fibre generale) を飲み込んでいる。

上述したようなスキームの場合はより繊細で、 \mathcal{F} がねじれている仮定を外すことはできない。(SGA4 XII 2) $R^q f_* \mathcal{F}$ のファイバーを書き下す section 2.3.3 ことで、定理 4.1 は本質的には次と同値である。

4.1.2 同値な定理

定理 4.2. A を局所強ヘンゼル環とし、 $S = \text{Spec}(A)$ とする。 $f: X \rightarrow S$ を固有な射、 X_0 を f による閉ファイバーとする。このとき、任意の X 上のねじれアーベル層 \mathcal{F} と任意の $q \geq 0$ に対して、 $H^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X_0, \mathcal{F})$ となる。

極限を経由しているため、 A がただ一つの素イデアルを持つ有限型 \mathbb{Z} 代数であるような強ヘンゼル環であるときにこの定理を証明すれば十分である。最初に、 $q = 0$ か $q = 1$ で $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である場合を扱う。section 4.2 構成可能層 section 4.3 の概念をもとにした議論によって、 \mathcal{F} が定数層である場合を考えれば十分であることがわかる。一方、devissage ?? によって、 X_0 が曲線であると仮定して良い。このとき、 $q = 2$ のときに定理を証明することだけが残っている。??

他の応用 ?? の中でも、この定理によって真の台を持つコホモロジーの理論 ?? を構築することができる。

4.2 Demonstration pour $q = 0$ ou 1 et $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$q = 0$ であって、 \mathcal{F} が定数層であるときの結論は次の命題 [ザリスキーの接続定理 (theoreme de connexion de Zariski)] と同値である。

4.2.1 ザリスキーの接続定理

命題 4.3. A を局所ヘンゼルネーター環とし、 $S = \text{Spec}(A)$ とする。 $f: X \rightarrow S$ を固有な射、 X_0 を f による閉ファイバーとする。このとき、連結成分の集合 $\pi_0(X)$ と $\pi_0(X_0)$ の間に全単射がある。

これは開かつ閉であるものの集合 $Of(X)$ と $Of(X_0)$ の間に全単射があることを示すことと同じである。我々は、集合 $Of(X)$ と $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ の冪等元との全単射な対応があり、同様に、 $Of(X_0)$ と $\Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ の冪等元との全単射な対応があることがわかっている。

注意 4.4. $Of(X)$ は開かつ閉 (Ouvert-fermé) の頭文字である。

それゆえ、標準的な写像

$$\text{Idem}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \rightarrow \text{Idem}(\Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}))$$

が全単射であることが示せれば良い。

\mathfrak{m} によって、 A の極大イデアルを表し、 $\Gamma(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{O}_X})$ で \mathfrak{m} 進位相による $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ の完備化を表す。また、任意の $n \geq 0$ について、 $X_n := X \otimes_A A/\mathfrak{m}^{n+1}$ と定める。固有な射の有限性定理 [EGA III, 3.2] によって $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ は有限 A 代数である。 A がヘンゼル環であることから、標準的な写像

$$\text{Idem}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \rightarrow \text{Idem}(\Gamma(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{O}_X}))$$

が全単射であることがわかる。

固有な射の比較定理 [EGA III, 4.1] によって、標準的な写像

$$\Gamma(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{O}_X}) \rightarrow \varprojlim \Gamma(X_n, \mathcal{O}_{X_n})$$

が全単射になる。とくに、標準的な写像

$$\mathrm{Idem}(\Gamma(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{O}_X})) \rightarrow \varprojlim \mathrm{Idem}(\Gamma(X_n, \mathcal{O}_{X_n}))$$

は全単射になる。しかし、 X_n と X_0 は同じ下部位相空間を持つから、標準的な写像

$$\mathrm{Idem}(\Gamma(X_n, \mathcal{O}_{X_n})) \rightarrow \mathrm{Idem}(\Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}))$$

は任意の n に対して全単射であり、これによって証明が完了する。

$H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ と X の群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ によるエタールガロア被覆の同型類の集合との間に全単射が存在するから、 $q = 1$ と $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ についての定理は次の命題から従う。

4.2.2 ガロア被覆の圏同値

命題 4.5. A を局所ヘンゼルネーター環とし、 $S = \mathrm{Spec}(A)$ とする。 $f: X \rightarrow S$ を固有な射、 X_0 を f による閉ファイバーとする。このとき、制限関手

$$\mathrm{Rev.et.}(X) \rightarrow \mathrm{Rev.et.}(X_0)$$

は圏同値を与える。

[X_0 が連結で基点を X_0 の幾何学的点であると仮定すると、この命題は (副有限) 基本群の間の標準的な写像 $\pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(X)$ が全単射であることと言える。]

命題 4.3 より、この関手は忠実充満であることがわかる。これにより、もし X' と X'' が X の二つのエタール被覆であるとき、 X' と X'' の間の X -射はその $X' \times_X X''$ の開かつ閉なグラフによって決まる。

これは X'_0 と X_0 のエタール被覆が X のエタール被覆にまで延長できるかどうかという問題になる。エタール被覆は冪零元に依存しない [SGA 1, chap.I] から、 X'_0 は $n \geq 0$ それぞれに対して X_n のただ一つのエタール被覆 X'_n に持ち上がる。言い換えれば、 X_0 に沿って X を完備化した形式スキーム \mathcal{X} のエタール被覆 \mathcal{X}' である。形式的接続層におけるグロタンディークの algebraization theorem (théorème d'algèbrisation des faisceaux cohérents formels de Grothendieck) [théorème d'existence, EGA III.5] によって、 \mathcal{X}' は $\overline{X} := X \otimes_A \hat{A}$ のエタール被覆 \overline{X}' の形式的完備化 (complete formel) になる。

極限を経由しているため、 A が有限型 \mathbb{Z} 代数であるような強ヘンゼル環であるときにこの定理を証明すれば十分である。ここで、アルティンの approximation theorem (le théorème d'approximation d'Artin au foncteur) を A 代数 B に対して、 $X \otimes_A B$ のエタール被覆の同型類の集合を対応させるような関手 $F: (A \text{ 代数}) \rightarrow (\text{集合})$ に適用することができる。これによって、この関手は局所有限表示であることがわかる。すなわち、 B_i を A 代数の帰納系とし、 $B := \varinjlim B_i$ とするとき、 $F(B) = \varinjlim F(B_i)$ となる。アルティンの定理から、元 $\bar{\zeta} \in F(\hat{A})$ が与えられたとき、この場合はその元は \overline{X}' の同型類であるが、ある $\zeta \in F(A)$ が存在して、 $F(A/\mathfrak{m})$ において ζ と同じ像を持つ。言い換えれば、 X のエタール被覆 X' であって X_0 への制限が X'_0 と同型になるものが存在する。

4.3 Faisceaux constructibles

参考文献

参考文献は以下の通り

- [SGA4.5] P. Deligne and J. F. Boutot, “Cohomologie étale,” in Cohomologie Etale, Berlin, Heidelberg, 1977, pp. 4 – 75, doi: 10.1007/BFb0091518.
- [D1] “数学フランス語小辞典.” <http://yuyamatsumoto.com/mfr.html> (accessed Jan. 15, 2021).
- [MD] “岩波数学辞典「代数多様体 H」.” <http://www.normalesup.org/~forgogozo/divers/M0/Iwanami-suugakuziten.pdf>.
- [D2] “www.normalesup.org Git - forgogozo/和仏数学辞典/.git/blob - wahutusuugakuziten.txt.” <http://www.normalesup.org/phare/gitweb?p=forgogozo/%E5%92%8C%E4%BB%8F%E6%95%B0%E5%AD%A6%E8%BE%9E%E5%85%B8/.git;a=blob;f=wahutusuugakuziten.txt>(accessed Jan. 15, 2021).
- [Ya] 柳田伸太郎, “2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV 12 月 13 日分講義ノート (GAGA).” <https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/18W/20181213.pdf>.
- [Mi] 三枝洋一, “エタールコホモロジーと 1 進表現.” <http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/ss2009proceeding/SummerSchool-0201-2.pdf>.
- [Sa] 佐藤周友, “ガロアコホモロジー.” <http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/ss2009proceeding/ss2009-report.pdf>.