§1 Witt rings

§1.1 Strict p-rings

<u>Def 1.1.1</u> p : prime number

R : ring が strict p-ring であるとは以下を満たすこと：

(1) p-adically complete, separated ($R \to \varprojlim R/p^nR$ が全単射)

(2) p は NZD

(3) $K = R/p$ が perfect

$\square$

<u>Example 1.1.2</u> $\mathbb{Z}_p$ は strict p-ring $\square$

<u>Thm 1.1.3</u> p : prime number K : 標数 p の perfect ring

(1) K が剰余環の strict p-ring R が存在し、

R' もそうであれば唯一の同型射があって
$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & R' \arrow[dl] \\ & K & \end{tikzcd}$$
は comm.

(2) Teichmüler representatives と呼ばれる map $\tau : K \to R$

があって. $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$, $\tau(x) \equiv x \mod p$

(3) ${}^\forall x \in R$ に対し. $x = \sum_{n=0}^{\infty} \tau(x_n) p^n$ $(x_n \in K)$ と

一意に表される.

(4) $f : K \to K'$ を標数 p の perfect ring の射として.

R, R' を K, K' の strict p-ring τ, τ' を K, K' の Tei. rep.

とする. このとき, $F : R \to R' : \sum_{n=0}^{\infty} \tau(x_n) p^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \tau'(f(x_n)) p^n$

は以下を可換にする準同型

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "F"] \arrow[d] & R' \arrow[d] \\ K \arrow[r, "f"] & K' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "F"] & R' \\ K \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "f"] & K' \arrow[u, "\tau'"'] \end{tikzcd}$$

$\square$

任意の2つの元 $\sum \tau(x_n)p^n$, $\sum \tau(y_n)p^n$ の和を考える。それを

$\sum \tau(s_n)p^n = \sum \tau(x_n)p^n + \sum \tau(y_n)p^n$ と表す。($x_n, y_n, s_n \in K$)

x_n, y_n, s_n の関係をみる。

$\tau(x_0)+\tau(y_0) \equiv \tau(s_0) \mod p$ なので $x_0+y_0 = s_0$

$$\tau(x_0)+p\tau(x_1)+\tau(y_0)+p\tau(y_1) \overset{\mathrm{mod}\ p^2}{\equiv} \tau(s_0)+p\tau(s_1)$$

K が perfect より $\tau(s_0) = \tau(s_0^{\frac{1}{p}})^p = \tau(x_0^{\frac{1}{p}}+y_0^{\frac{1}{p}})^p \overset{\mathrm{mod}\ p^2}{\equiv} \{\tau(x_0^{\frac{1}{p}})+\tau(y_0^{\frac{1}{p}})\}^p$

$$\left(\because \tau(x_0^{\frac{1}{p}}+y_0^{\frac{1}{p}}) \overset{\mathrm{mod}\ p}{\equiv} \tau(x_0^{\frac{1}{p}})+\tau(y_0^{\frac{1}{p}})\right)$$

$$\therefore\ p\tau(s_1) \overset{\mathrm{mod}\ p^2}{\equiv} p\{\tau(x_1)+\tau(y_1)\} - \sum_{n=1}^{p-1}\binom{p}{n}\tau(x_0^{\frac{1}{p}})^n\tau(y_0^{\frac{1}{p}})^{p-n}$$

$$\therefore\ \tau(s_1) \overset{\mathrm{mod}\ p}{\equiv} \tau(x_1)+\tau(y_1) - \sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{p}\binom{p}{n}\tau(x_0^{\frac{1}{p}})^n\tau(y_0^{\frac{1}{p}})^{p-n}$$

$$\rightsquigarrow\ s_1 = x_1+y_1-\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{p}\binom{p}{n}x_0^{\frac{n}{p}}y_0^{\frac{n}{p}}$$

同様に。$\mathbb{Z}[X_0, X_1, Y_0, Y_1]$ 上で

$w_1(T) := T$ $\quad w_p(T_0, T_1) := T_0^p + pT_1$ とおいて。

$$\begin{cases} S_0 = X_0+Y_0 \\ w_p(S_0, S_1) = w_p(X_0, X_1)+w_p(Y_0, Y_1) \end{cases}$$ を解くと。

$S_0 = X_0+Y_0$, $\quad S_1 = X_1+Y_1-\sum\frac{1}{p}\binom{p}{n}X_0^nY_0^{p-n}$ となる。

同様に。$w_{p^n}(T_0, T_1, \cdots, T_n) := T_0^{p^n}+pT_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^nT_n$ とおいて

$$\{\ w_{p^i}(S_0, S_1, \cdots, S_i) = w_{p^i}(X_0, \cdots, X_i)+w_{p^i}(Y_0, \cdots, Y_i) \quad (0 \le i \le n)$$

の解を $(S_0, \cdots, S_n)$ とする。

<u>Thm 1.1.4</u> $\quad s_n = S_n(x_0^{p^{-n}}, y_0^{p^{-n}}, \cdots, x_n, y_n)$ □

積も同様に $Z_n \in \mathbb{Z}[X_0, Y_0, \cdots]$ を定めることができる。

§1.2 Witt rings

Def 1.2.1 (Witt rings) p : prime number　A : 環

$W(A) := \prod_{n=0}^{\infty} A$　　$W_n(A) := \prod_{i=0}^{n} A$

$w_{p^n} : W(A) \to A : (x_0, x_1, \cdots) \mapsto w_{p^n}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$

$[-] : A \to W(A) : x \mapsto (x, 0, \cdots) =: [x]$ と定める □

Thm 1.2.2 $W(A)$ にある環構造が入り. 以下をみたす.

$W(-)$ は $\mathrm{Alg}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{Z}}$ の関手となり.

(1) $f : A \to B$ に対し. $W(f) : (a_n) \mapsto (f(a_n))$

(2) $w_{p^n} : W(A) \to A$ は環の射

0 は $(0, 0, \cdots)$　　1 は $(1, 0, \cdots)$

□

$R := \mathbb{Z}[X_0, Y_0, X_1, Y_1, \cdots]$ とする.

$X = (X_n)$, $Y = (Y_n) \in W(R)$ として. $S = (S_n) = X + Y \in W(R)$

とおくと. w_{p^n} は環の射 なので

$w_{p^n}(S) = w_{p^n}(X) + w_{p^n}(Y)$, よって S_n は先の S_n と同じ.

Cor 1.2.3 A : ring　$\forall x, y \in W(A)$　$s_n := S_n(x_0, y_0, \cdots, x_n, y_n)$

(resp $z_n := Z_n(x_0, y_0, \cdots, x_n, y_n)$)

$\rightsquigarrow s = (s_n) = x + y$　(resp. $z = (z_n) = x \cdot y$) □

∵) $f : R \to A$ を $X_i \mapsto x_i$, $Y_i \mapsto y_i$ とおけば

$$s = W(f)(S) = W(f)(X) + W(f)(Y) = x + y$$ ■

この和と積によって $W(A)$ の環構造が定まっている.

§1.3 Witt rings of perfect rings

Thm 1.3.1 p : prime number　K : 標数 p の perfect ring

R : K の strict p-ring　τ : K の Ter. rep.　このとき

$f : W(K) \to R : (x_n) \mapsto \sum \tau(x_n^{p^{-n}}) p^n$　は isom □

$\because$) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を示す（積も同様）$s = x+y$ とすると

$s_n = S_n(x_0, y_0, \cdots, x_n, y_n)$ このとき

$s_n^{p^n} = S_n(x_0^{p^n}, y_0^{p^n}, \cdots, x_n^{p^n}, y_n^{p^n})$ よって.

$\tilde{s_i} := s_i^{\frac{1}{p^i}}$ $\tilde{x_i} := x_i^{\frac{1}{p^i}}$ $\tilde{y_i} := y_i^{\frac{1}{p^i}}$ とおけば. 1.1.4 より

$\sum \tau(\tilde{x_i}) p^i + \sum \tau(\tilde{y_i}) p^i = \sum \tau(\tilde{s_i}) p^i$

$\Leftrightarrow$ $f(x) + f(y) = f(s)$ $\boxtimes$

§2 Perfectoid rings

p : prime number をコテイする.

§2.1 A_{inf} rings

$W(-)$ を perfect $\mathbb{F}_p$-alg に制限すると

$W(-)$: {perfect $\mathbb{F}_p$-alg} $\to$ {p-adically complete $\mathbb{Z}_p$-alg}

は colimit を保存する.

$\left(\widehat{\varinjlim W(A_i)} / p\, \widehat{\varinjlim W(A_i)} = \varinjlim W(A_i) / p \varinjlim W(A_i) = \varinjlim W(A_i)/pW(A_i) = \varinjlim A_i\right.$

で 1.1.3 (1) より)

よって $W(-)$ は右随伴関手をもつ.

これは tilting と呼ばれる関手で $S \mapsto \varprojlim_{x \mapsto x^p} S/pS$ で与えられ.

$S^\flat$ と表す. 実際.

$\mathrm{Hom}(W(R), S) \to \mathrm{Hom}(R, S/pS) \to \mathrm{Hom}(R, S^\flat)$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] & W(R) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[r] & S/pS \arrow[r, mapsto] & \text{tilting をとる.} \\ & W(R)/pW(R) \arrow[urr, dashed] & & \Leftarrow \text{これ} & \end{tikzcd}$$

は全単射となる. このとき. counit

$$\mathrm{Hom}(W(S^\flat), S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(S^\flat, S^\flat)$$
$$\theta \longleftarrow\!\!\shortmid\ \mathrm{id}$$

を θ とおく。また $A_{\mathrm{inf}}(S) := W(S^\flat)$ とおく

$\#: S^\flat \to S : (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots) \mapsto \lim x_n^{p^n} =: x^\#$ とおくと

$\theta([x]) = x^\#$ $\left(\because \theta([x]) = \lim \theta([x^{p^{-n}}])^{p^n} = \lim (x^{p^{-n}})^{\# p^n} = x^\# \right)$

以下より $x \in S^\flat$ は $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots)$ $(x^{(n)} \in S/pS)$ と表す。

§2.2 Perfectoid rings

Def 2.2.1 S : ring が perfectoid であるとは 以下を満たすこと：

(1) $\exists \pi \in S$ s.t. S は π-adically complete, separated, $(p) \subset (\pi^p)$

(2) $\varphi : S/pS \to S/pS : x \mapsto x^p$ が surjective

(3) $\mathrm{Ker}\,\theta$ が principal □

Thm 2.2.2 S : ring, π-adically complete, separated

$(\pi \in S, (p) \subset (\pi^p))$ 以下は同値：

(1) $S/\pi p S \to S/\pi p S : x \mapsto x^p$ は全射

(2) $S/pS \to S/pS$ 〃

(3) $S/\pi^p S \to S/\pi^p S$ 〃

(4) $\theta : A_{\mathrm{inf}}(S) \to S$ は surjective □

$\because)$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) は明らか

(3) $\Rightarrow$ (1) : ${}^\forall x \in S$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_i{}^p \pi^{pi}$ と表されるので

$x \equiv \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i \pi^i\right)^p \mod \pi p$ より OK //

(4) ⇒ (2)： $\mathrm{Hom}(A_{\inf}(S), S) \to \mathrm{Hom}(S^\flat, S^\flat)$ にそった

θ の像を θ' とおすと。θ' は surj. で $\forall x' \in S/pS$，$\exists x \in S^\flat$

$x' = \theta'(x) = x^{(0)} = (x^{(1)})^p$ より OK //

(2) ⇒ (4)： 上の θ' を用いて。(2) より θ' は surj. であるので

$\forall a \in S$ $\exists x_0 \in S^\flat$，$\theta([x_0]) \equiv a \mod p$ よって.

$\exists a_1 \in S$，$a = \theta([x_0]) + pa_1$，以下同様に.

$a = \sum_{i=0}^{\infty} \theta([x_i])p^i$ を得る. よって $a = \theta(\sum_{i=0}^{\infty} [x_i]p^i)$ // ▯

これにより，S が perfectoid なら，$S = W(S^\flat)/(\xi)$

($\mathrm{Ker}\,\theta = (\xi)$ とした)

<u>Lemma 2.2.3</u> S が perfectoid であることと以下は同値

$\exists B$: perfect $\mathbb{F}_p$-alg. $\exists \xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots) \in W(B)$ s.t.

$$S = W(B)/(\xi)$$

かつ. B は ξ_0-adically complete で $\xi_1 \in B^\times$ □

<u>Thm 2.2.4</u> S : ring，π-adically complete ($\pi \in S$, $(p) \subset (\pi^p)$)

$\varphi : S/\pi S \to S/\pi p S : x \mapsto x^p$ は surjective とする.

(1) $\mathrm{Ker}\,\theta$ が principal ⇒ φ は isom. で $\mathrm{Ker}\,\theta$ の生成元は NZD

(2) φ が isom で π が NZD ⇒ $\mathrm{Ker}\,\theta$ は principal □

∵) φ が surj. より 2.2.2 (3) が成り立つので 2.2.2 (1) が成り立つ

<u>claim</u> $\pi^\flat \in S^\flat$ で $\exists u \in S^\times$. $\theta([\pi^\flat]) = (\pi^\flat)^\# = \pi u$

となるものが存在する.

∵) $\varprojlim_{x \mapsto x^p} S/\pi p S \to \varprojlim S/pS = S^\flat$ はモノイドとして isom. よって

$^\exists \pi^\flat \in S^\flat,\ (\pi^\flat)^\# \equiv \pi \mod \pi p$

$\therefore\ ^\exists x \in S \quad (\pi^\flat)^\# = \pi - \pi p x = \pi(1-px)$

このとき $(1-px)(1+(px)+(px)^2+\cdots) = 1$ より

$1-px \in S^\times$ //

今回の Thm は π を単元倍しても影響がないので

π を $\pi(1+px)$ におきかえてよい.

次に、$\mathrm{Ker}\,\theta$ の生成元を求める. $(p) \subset (\pi^p)$ と θ の全射性より

$p = \pi^p \theta(-x) \quad ({}^\exists x \in A_{inf}(S))$ と表される.

$\xi = p + [\pi^\flat]^p x$ とおくと. $\theta(\xi) = p + \pi^p \theta(x) = 0$ より

$\xi \in \mathrm{Ker}\,\theta$.

$\mathrm{Ker}\,\theta$ が principal であるとき. $\mathrm{Ker}\,\theta = (\xi')$ と表すと $^\exists a \in A_{inf}(S)$

$\xi = \xi' a$, $a \in A_{inf}(S)^\times$ を示す.

$(\pi^{\flat p} x_0, 1 + \pi^{\flat p^2} x_1, \cdots) = p + [\pi^\flat]^p x = \xi = \xi' a$

$= (\xi'_0, \xi'_1, \cdots)(a_0, a_1, \cdots) = (\xi'_0 a_0, \xi_0'^{p} a_1 + \xi'_1 a_0^p, \cdots) \in A_{inf}(S)$

よって $\xi'_1 a_0^p = 1 + \pi^{\flat p^2} x_1 - \xi_0'^{p} a_1 \in S^\flat$

$S^\flat = \varprojlim S/\pi S$ なので. これを $S/\pi S$ に送ると

$$\begin{tikzcd}
A_{inf}(S) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & S \arrow[r] & S/\pi S \\
S^\flat \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

← この射で送ることと同じなので

$\theta([\xi'_1 a_0^p]) \overset{\mathrm{mod}\,\pi}{\equiv} 1 + \pi^{p^2}\theta([x_1]) - 0 \overset{\mathrm{mod}\,\pi}{\equiv} 1$

よって. $\xi'_1 a_0^p = (y_0, y_1, \cdots) \in S^\flat \quad (y_i \in S/\pi S)$

と表したとき. $y_0 \in (S/\pi S)^\times$ で y_0^{-1} が存在.

$y_1^p = y_0$ なので. $y_1^{-1} = y_1^{p-1} \cdot y_0^{-1}$ となり.

$(y_1^{-1})^p = (y_1^p)^{p-1} \cdot (y_0^{-1})^p = y_0^{-1}$ なので $\exists a_0^p \in (S^\flat)^\times$

よって. $a_0 \in (S^\flat)^\times$. よって $a = [a_0] + px \in A_{inf}(S)$ $(\exists x \in A_{inf}(S))$

なので, $a \in (A_{inf}(S))^\times$ $\therefore \operatorname{Ker}\theta = (\xi)$

(1): このとき. $\theta : A_{inf}(S)/(\xi) \to S$ は isom. よって

$$S^\flat/\pi^{\flat p}S^\flat = A_{inf}(S)/(\xi, [\pi^\flat]^p) \to S/\pi^p S$$

$$S^\flat/\pi^\flat S^\flat = A_{inf}(S)/(\xi, [\pi^\flat]) \to S/\pi S \text{ は isom.}$$

このとき. φ は $\varphi' : S^\flat/\pi^\flat S^\flat \to S^\flat/\pi^{\flat p}S^\flat$ によってひきおこされる.

$S^\flat$ は perfect より φ' は isom. よって φ は isom.

ξ が NZD を示す. $\exists b \in A_{inf}(S)$ $\xi b = 0$ とすると

$\forall r$: 奇数 で $p^r + ([\pi^\flat]^p x)^r = (p + [\pi^\flat]^p x)(p^{r-1} - p^{r-2}[\pi^\flat]^p x + \cdots)$

なので $(p^r + ([\pi^\flat]^p x)^r) b = 0$.

よって. $p^r b \in [\pi^\flat]^{pr} A_{inf}(S)$ より

$p^r b = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{r}, b_0^{p^r}, \cdots, b_i^{p^r}, \cdots) = [\pi^\flat]^{pr} c$ $(\exists c)$

$= (\pi^{\flat pr} c_0, (\pi^{\flat pr})^p c_1, \cdots, (\pi^{\flat pr})^{p^{r+i}} c_{r+i}, \cdots)$

よって $b_i^{p^r} \in (\pi^\flat)^{p^{r+i+1} r} S^\flat$ $\therefore b_i \in (\pi^\flat)^{p^{i+1} r} S^\flat$

$\therefore b = 0$. ($S^\flat$ は $\pi^\flat$-adically complete separated より)

(2): $\pi^\flat \in S^\flat$ の存在より. $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ なる列 $\{\pi_n\} \subset S$

が取れるので. $\pi^{p^n} = \pi_n$ と表す.

$S^\flat \to S/\pi S$ の Ker が $(\pi^\flat)$ であることを示す.

$S/\pi S \to S/\pi^p S$ が isom. より

$\forall n \in \mathbb{N}$. $S/\pi^{\frac{1}{p^n}} S \to S/\pi^{\frac{1}{p^{n-1}}} S$ も isom. —①

$x \in S^\flat = \varprojlim S/\pi S$ が $x^{(0)} = 0$ のとき.

$(x^{(n)})^{p^n} = x^{(0)} = 0$. よって ① より

$$S/\pi^{\frac{1}{p^n}} S \to \cdots \to S/\pi S$$

$$\overline{x^{(n)}} \longmapsto (x^{(n)})^{p^n} = 0$$

, $x^{(n)} \equiv 0 \mod \pi^{\frac{1}{p^n}}$ となる

$x^{(n)}$ の代表元 x_n をとって. $x_n = \pi^{\frac{1}{p^n}} y_n$ と表すと.

$\pi^{\frac{1}{p^n}} (y_{n+1})^p = (x_{n+1})^p = x_n = \pi^{\frac{1}{p^n}} y_n$. π は NZD なので

$(y_{n+1})^p = y_n$. よって $y = (\overline{y_0}, \overline{y_1}, \cdots) \in S^\flat$ とおけば.

$x = \pi^\flat \cdot y \in (\pi^\flat)$. 以上より Ker が $(\pi^\flat)$ で

$$S^\flat/\pi^\flat S^\flat \xrightarrow{\sim} S/\pi S$$

これより $A_{inf}(S)/(\xi, [\pi^\flat]) = S^\flat/\pi^\flat S^\flat \to S/\pi S$ が isom. なので

$x \in A_{inf}(S)$ が $\theta(x) = 0$ のとき. $x \in (\xi, [\pi^\flat])$

$\therefore x = y_0 \xi + [\pi^\flat] x_1 \quad (\exists y_0, x_1 \in A_{inf}(S))$

$\to \pi\theta(x_1) = \theta([\pi^\flat] x_1) = \theta(x - y_0\xi) = 0$ で

π が NZD より $\theta(x_1) = 0$. 以下同様に

$x = \xi(y_0 + y_1[\pi^\flat] + \cdots) \in (\xi)$ // ■